Teodor Dumitru Vălcan

Module cu proprietatea intersecției sumanzilor direcți

Presa Universitară Clujeană

TEODOR DUMITRU VĂLCAN

MODULE CU PROPRIETATEA INTERSECŢIEI SUMANZILOR DIRECŢI

Referenţi ştiinţifici:

Prof. univ. dr. Dorin Andrica
Prof. univ. dr. Iuliu Crivei

ISBN 978-606-37-0367-6

Universitatea Babeş-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruţa Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@editura.ubbcluj.ro
http://www.editura.ubbcluj.ro/

TEODOR DUMITRU VĂLCAN

MODULE CU PROPRIETATEA INTERSECȚIEI SUMANZILOR DIRECȚI

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

2018

Profesorilor mei:
IOAN PURDEA
și
GRIGORE CĂLUGĂREANU,
de la Facultatea de Matematică-Mecanică,
a Universității „*Babeș-Bolyai*”
din Cluj-Napoca,
Cu mulțumiri și aleasă prețuire.

SCURT ISTORIC ŞI INTRODUCERE

Istoria R-modulelor (grupurilor abeliene) cu proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi începe cu Kaplansky, care în [58] precizează că:

- *Dacă M este un modul liber peste un inel principal, atunci intersecţia oricărui număr finit de sumanzi direcţi ai lui M este tot un sumand direct în M, iar dacă M este un modul liber de rang numărabil, peste acelaşi inel, atunci intersecţia oricărui număr de sumanzi direcţi (ai lui M) este tot un sumand direct în M.*

Acest fapt îl determină pe Fuchs în [41] să facă, la rândul lui, aceeaşi precizare pentru grupuri abeliene libere, pentru grupuri abeliene libere numărabile şi grupuri abeliene libere de puterea continuului. Mai mult, Fuchs propune spre rezolvare următoarea problemă deschisă („*Problema 9*”):

- „*Caracterizaţi grupurile în care intersecţia a doi sumanzi direcţi este tot un sumand direct*”.

Grupurile (modulele) în care intersecţia oricăror doi sumanzi direcţi este tot un sumand direct le vom numi grupuri (module) cu proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi, prescurtat P.I.S.D.. De asemenea, *vom spune că un grup abelian (sau un R-modul) M are complet (sau total) proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi (prescurtat C.P.I.S.D.) dacă intersecţia oricărui număr de sumanzi direcţi ai lui M este tot un sumand direct (în M)*. Desigur că:

- *dacă un grup abelian (un R-modul) are C.P.I.S.D., atunci el are şi P.I.S.D.*.

  Reciproca acestei afirmaţii, în general, este falsă; de exemplu,

- *un grup abelian liber de puterea continuului are P.I.S.D., dar nu are C.P.I.S.D.* – vezi (1.2.2.8).

Mai recent, în februarie 1997, Fuchs propune spre rezolvare o altă problemă deschisă:

- „*Să se găsească condiţii necesare şi/sau suficiente pentru un R-modul (în particular un grup abelian) M, astfel încât, fiind dată o mulţime de indici I (finită sau infinită), $\oplus_I M$ să aibă P.I.S.D.*”.

Vom numi această nouă problemă a lui Fuchs, „*Problema 9**”.

În ceea ce priveşte rezolvarea „*Problemei 9*”, respectiv a „*Problemei 9**” (a lui Fuchs) putem distinge două etape:

- *prima etapă – din 1977 până în 1991*,

și

- *a doua - din 1992 până în prezent.*

Precizăm că prezenta carte este dedicată, în întregime, rezolvării acestor probleme.

Conţinutul ştiinţific al acestei cărţi este structurat în patru capitole, după cum urmează:

❖ **Capitolul întâi** – ***Preliminarii*** conţine cele mai importante rezultate obţinute în prima etapă, obţinute de Kamalov [55], Wilson [97], Hausen [48], respectiv Arnold şi Hausen [13], rezultate care, într-o formă sau alta, s-au folosit în demonstrarea celorlalte rezultate prezentate în capitolele următoare.

Rezultatele originale obţinute în a doua etapă sunt conţinute în Capitolele 2, 3 şi 4.

Prezentăm, în continuare, pe scurt, rezultatele obţinute, făcând astfel şi o descriere succintă a celor prezentate în volum.

Primul care s-a ocupat de rezolvarea acestor probleme a fost F. F. Kamalov, care în [55] publică o serie de rezultate fundamentale în caracterizarea grupurilor abeliene cu P.I.S.D.; el numeşte σ - *grup* un grup cu această proprietate. Rezultatele lui ne-au permis să stabilim, în [80], structura grupurilor (abeliene) de torsiune, respectiv a grupurilor fără-torsiune, complet decompozabile, cu P.I.S.D. şi să obţinem, în [82], alte caracterizări ale grupurilor mixte cu această proprietate.

Desigur că:

- *dacă G este un grup cu P.I.S.D. (C.P.I.S.D.), atunci orice sumand direct al lui G are această proprietate*,

iar,

- *dacă*:

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i$$

este o descompunere directă a grupului G astfel încât, pentru orice $i\in I$, G_i *este un sumand direct total invariant în G şi, pentru orice* $i\in I$, G_i *are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.), atunci G are P.I.S.D..*

Rezultă că:

- *un grup de torsiune G are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.) dacă şi numai dacă fiecare p-componentă primară a sa are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.).*

Referitor la p-grupurile cu P.I.S.D., putem afirma că:

- *dacă G este un astfel de grup, atunci, pentru orice* $g\in G[p]$,

$$h_p^G(g)=0 \qquad \text{sau} \qquad h_p^G(g)=\infty.$$

Acest fapt ne va permite să determinăm teorema de structură a acestor grupuri.

Kamalov este acela care arată că:

- *dacă G este un grup mixt cu P.I.S.D., atunci primul subgrup Ulm al părţii de torsiune a lui G este nul*,

şi folosind faptul că:

- *orice grup complet decompozabil şi omogen are P.I.S.D.*,

demonstrează teorema de structură a grupurilor fără-torsiune, complet decompozabile, cu această proprietate.

G. V. Wilson, în [97], abordează problema intersecţiei sumanzilor direcţi pentru module peste diferite inele R, asociative, cu unitate. După ce generalizează anumite rezultate ale lui Kamalov, la R-module, el prezintă o condiţie necesară pentru ca un R-modul să aibă P.I.S.D.:

- *Dacă R-modulul M are P.I.S.D., atunci, pentru orice descompunere directă a lui, de forma*:

  $M=A\oplus B$

  şi orice morfism:

  $f: A \to B$,

  kerf este un sumand direct în A.

Această condiţie va juca un rol fundamental în obţinerea celorlalte rezultate. Astfel, pentru un inel R, se vor obţine noi condiţii echivalente cu „*caracterul ereditar*" (*toate R-modulele proiective au P.I.S.D.*) şi cu „*caracterul semi-simplu*" (*toate R-modulele injective au P.I.S.D.*). Modulele injective cu P.I.S.D. sunt caracterizate peste domenii noetheriene, unde:

- *P.I.S.D. implică C.P.I.S.D.*;

aceste module sunt *sau fără-torsiune, sau de torsiune, caz în care orice sumand direct idecompozabil, al lor, este total invariant*. Ţinând cont de faptul că:

- *orice R-modul cu P.I.S.D., peste un domeniu noetherian R, are un unic sumand direct injectiv maximal*,

Wilson arată că:

- *orice astfel de R-modul mixt, neredus, este scindabil*.

Modulele de torsiune cu P.I.S.D. sunt studiate peste domenii Dedekind, folosind teorema de descompunere a acestora:

- *Dacă T este un modul de torsiune peste un domeniu Dedekind R, atunci T admite o descompunere unică, abstracţie făcând de un izomorfism, sub forma*:

  $T=\oplus T_P$,

  unde T_P este un P-submodul primar, pentru fiecare ideal prim P, al lui R.

Va rezulta, de aici, că:

- *dacă T are P.I.S.D., atunci fiecare T_P este un submodul elementar sau ciclic*,

iar,

- *dacă M este un R-modul cu P.I.S.D., atunci T(M) - partea de torsiune a lui M are C.P.I.S.D.*;

în particular:

- *dacă R este un domeniu cu ideale principale şi M are un submodul divizibil, atunci M are C.P.I.S.D.*.

În 1989, J. Hausen publică în [48] primele lui rezultate referitoare la cele două probleme (9 şi 9*). Mai întâi, el arată că are loc şi reciproca condiţiei lui Wilson, adică:

- *Dacă un R-modul M are proprietatea că pentru orice descompunere directă de forma*:

  $$M=A\oplus B$$

  şi orice morfism de R – module:

  $$f: A\rightarrow B,$$

  kerf este un sumand direct în A, atunci M are P.I.S.D..

Utilizând un rezultat al lui Botha şi Gräbe ([18]), care consideră clasa $\mathcal{T}$ a tuturor R-modulelor fără-torsiune, de rang finit, care au inelul endomorfismelor un domeniu cu ideale principale, clasă care conţine toate R-modulele fără-torsiune de rang unu, se demonstrează că:

- *Dacă M este o sumă directă finită de exemplare de $A\in\mathcal{T}$, atunci nucleul oricărui endomorfism al lui M este un sumand direct în M, care este izomorf cu o sumă directă de exemplare de A, deci M are C.P.I.S.D.*.

Extinzând, în mod natural, de la grupuri abeliene la R-module, o echivalenţă categorială, prezentată prima dată de U. Albrecht în [2], apoi de D. M. Arnold şi E. L. Lady [14], şi D. M. Arnold şi C. Murley în [15], Hausen demonstrează primele condiţii echivalente pentru existenţa unor soluţii la „*Problema 9**”. Ca aplicaţii ale acestor condiţii apar rezultatele referitoare la:

1) modulele fără-torsiune, de rang unu, peste domenii cu ideale principale:

- *Dacă R este un domeniu cu ideale principale şi M un R-modul fără-torsiune, de rang unu, atunci au loc următoarele afirmaţii*:
  - ***a)*** *Inelul*:

    $$E=End(M)$$

    este un domeniu cu ideale principale;
  - ***b)*** *Pentru orice mulţime de indici I, R-modulul*:

    $$M^*=\oplus_I M$$

are P.I.S.D.;

c) *Nucleul oricărui endomorfism al lui M^* este un sumand direct în M^*, care este şi el o sumă directă de exemplare de M.*).

2) grupurile abeliene idecompozabile, de rang finit:

➢ *Dacă G este un astfel de grup, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

a) *Pentru orice mulţime de indici I, grupul*:

$$G^*=\oplus_I G$$

are P.I.S.D.;

b) *Pentru orice mulţime finită de indici I, grupul*:

$$G^*=\oplus_I G$$

are P.I.S.D.;

c) *Inelul endomorfismelor lui G este semi-ereditar drept.*

3) grupurile abeliene fără-torsiune, complet decompozabile, reduse şi neomogene.

Pentru această ultimă clasă de grupuri, Hausen foloseşte următoarea relaţie de echivalenţă, notată cu „~”, şi introdusă în [19] de Bowman şi Rangaswamy, pe mulţimea Γ a tipurilor tuturor subgrupurilor / sumanzilor direcţi G_i, $i\in I$, dintr-o descompunere de forma:

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i$$

a grupului G – fără-torsiune şi complet decompozabil:

➢ *dacă $t, t'\in\Gamma$, atunci $t\sim t'$ dacă şi numai dacă există un număr natural n şi există $t_1, \ldots, t_n\in\Gamma$ astfel încât*:

$t=t_1$, $t'=t_n$ şi, pentru orice $i=1, 2, \ldots, n-1$, t_i şi t_{i+1} sunt comparabile.

Dacă $\{\Gamma_n\}_{n\geq 1}$ este partiţia mulţimii Γ, corespunzătoare relaţiei „~”,

$G(t)=\{x\in G \mid t(x)\geq t\}$ şi $G_n=\sum\{G(t) \mid t\in\Gamma_n\}$,

atunci avem următorul rezultat, demonstrat în [19]:

➢ *Dacă G este separabil, atunci*:

$$G=\bigoplus_{n\geq 1} G_n$$

şi fiecare G_n este total invariant şi complet decompozabil, iar tipurile oricăror doi sumanzi direcţi de rang unu ai lui G_n sunt echivalente.

Utilizând aceste rezultate, Hausen redescoperă, în [48], prima parte a teoremei de structură a grupurilor abeliene fără-torsiune, neomogene, complet decompozabile, teoremă demonstrată integral, aşa cum am precizat mai sus, de Kamalov în [55].

În [13], D. M. Arnold şi J. Hausen au abordat problema intersecţiei sumanzilor direcţi din perspectiva modulelor care sunt plate peste inelul endomorfismelor lor:

- *Dacă R-modulul M este plat peste inelul*:

  E=End(M)

  al endomorfismelor sale, atunci M are P.I.S.D. exact dacă End(M) - privit ca E-modul drept, are această proprietate.

În [7], U., Albrecht şi J. Hausen au generalizat problema intersecţiei sumanzilor direcţi la R-module cu proprietatea intersecţiei cvasi-sumanzilor direcţi (prescurtat P.I.C.S.D.), iar câteva din rezultatele obţinute le-au folosit (în [8,1996]) în diverse caracterizări ale grupurilor abeliene mixte cu P.I.C.S.D..

❖ **Capitolul 2** intitulat ***Grupuri abeliene cu P.I.S.D.***, conţine, în exclusivitate, rezultate referitoare la grupurile abeliene cu proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi. Astfel se demonstrează aici teoremele de structură pentru cinci clase de grupuri abeliene şi aplicaţii imediate ale acestora, apoi alte caracterizări, decât cele prezentate în capitolul precedent, precum şi un studiu al subgrupurilor şi grupurilor factor ale acestor grupuri. Peste tot în acest capitol prin grup vom înţelege grup abelian în notaţie aditivă, iar cu **P** vom nota mulţimea tuturor numerelor prime.

Determinarea structurii grupurilor cu P.I.S.D. se va dovedi foarte utilă în dezvoltările viitoare. Am început cu grupurile libere, nu pentru că nu se cunoaşte structura acestor grupuri sau că grupurile libere cu P.I.S.D. ar avea o structură deosebită, ci pentru a începe studiul grupurilor cu P.I.S.D. cu justificarea celor două afirmaţii ale lui Fuchs, despre care am vorbit mai sus. Am demonstrat, astfel,

- *că orice grup liber (liber numărabil sau liber de puterea continuului) are P.I.S.D.*,

prezentând şi două aplicaţii ale acestui fapt, pentru grupuri Whitehead (prescurtat W-grupuri).

În determinarea structurii grupurilor cu P.I.S.D., am pornit de la cele demonstrate în Subcapitolul 1.1, începând cu p-grupurile şi continuând cu:

- *grupurile de torsiune*,
- *grupurile divizibile*,
- *grupurile fără-torsiune*,
- *grupurile mixte nereduse* (care sunt scindabile),

respectiv

- *grupurile mixte, reduse, scindabile*.

Tot aici am prezentat un exemplu de grup mixt redus, nescindabil, cu P.I.S.D. şi o condiţie suficientă pentru „*scindabilitatea*" unui grup mixt cu P.I.S.D..

p-grupurile cu P.I.S.D. au o serie de proprietăţi elementare, în sensul că:

- *dacă G este un p-grup cu P.I.S.D., atunci G este cu prezentare simplă, iar dacă G este un p-grup redus cu această proprietate, atunci G*:

- *are un sistem şi o serie de compoziţie „nice”*;
- *este proiectiv relativ la şirurile balansat-exacte de p-grupuri*;
- *este un sumand direct al unei sume directe de grupuri generalizate Prüfer*;
- *este total proiectiv*;
- *este total tranzitiv şi, pentru orice şir crescător de ordinale şi simboluri* ∞,

  $$u=(\alpha_0,\ldots,\alpha_n,\ldots),$$

  G(u) şi G/G(u) sunt total proiective.

Pentru câteva clase de grupuri G (p-grupuri, grupuri de torsiune, grupuri divizibile, grupuri fără-torsiune şi anumite grupuri mixte), cu P.I.S.D., s-au determinat inelul End(G) al endomorfismelor şi grupul Aut(G) al automorfismelor grupului G, iar pentru grupuri fără-torsiune s-au determinat condiţiile pe care trebuie să le satisfacă grupurile G şi H pentru ca grupul Hom(G,H) să aibă P.I.S.D.:

- *G este fără-torsiune şi divizibil*;
- *H este fără-torsiune şi divizibil*;
- *G este fără-torsiune, idecompozabil, H este divizibil şi* $G\oplus H$ *are P.I.S.D.*;
- *G este fără-torsiune cu P.I.S.D. şi H este fără-torsiune, de rang unu*;
- *G este fără-torsiune, de rang unu şi H este fără-torsiune cu P.I.S.D.*.

  Pentru orice grup abelian G, grupul caracterelor lui G este:

  $$CarG=Hom(G,Q/Z).$$

- *Dacă G este un grup fără-torsiune şi divizibil, atunci CarG are P.I.S.D.*.

  Acest rezultat poate fi îmbunătăţit astfel:

- *Dacă G este un grup fără-torsiune, complet decompozabil, cu P.I.S.D., atunci CarG are aceeaşi proprietate*.

  Grupurile mixte scindabile cu P.I.S.D. pot fi caracterizate şi astfel:

- *Fie G un grup mixt scindabil cu P.I.S.D., cu*:

  $$T=T(G)$$

  şi $\hat{T}$ *- completatul lui T în topologia p-adică. Atunci au loc următoarele afirmaţii*:

  a) *Pentru orice grup divizibil D, Ext(D,* $\hat{T}$*) este izomorf cu un sumand direct al unui produs direct de grupuri de forma* G/p^nG;

  b) *este izomorf cu un sumand direct al unui produs direct de grupuri de forma* G/p^nG;

  c) *Dacă B este un sumand direct fără-torsiune, redus, de rang unu, dintr-o descompunere oarecare a lui G, şi*:

$(Ext(Q/Z,B))_0=0$,

atunci învelitoarea pur-injectivă a lui T şi primul subgrup Ulm al învelitorii de cotorsiune a lui T sunt izomorfe cu $(Ext(Q/Z,G))_0$ - deci $(Ext(Q/Z,G))_0$ este un grup redus compact algebric. (C_0 notează primul factor Ulm al grupului C.)

Aşa cum am precizat mai sus, dacă un grup abelian G are proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi, atunci orice sumand direct H, al lui G, şi G/H au aceeaşi proprietate.

În finalul acestui capitol am prezentat condiţii necesare şi/sau suficiente pentru ca anumite subgrupuri ale grupului G, cu P.I.S.D., care nu sunt sumanzi direcţi şi grupurile factor corespunzătoare, să aibă P.I.S.D.. Astfel, fiind dat un grup abelian G, cu P.I.S.D., şi m un număr natural nenul, sunt investigate, aici, subgrupurile de tipul:

- $mG=\{mg \mid g\in G\}$,
- $G[m]=\{g\in G \mid mg=0\}$,
- $m^{-1}G=\{a\in A \mid ma\in G\}$ (în acest caz G este un subgrup al unui grup A),
- *F(G)* - subgrupul Frattini al lui G

şi,

- B_G - subgrupul p-bazic al lui G, p fiind un număr prim oarecare,

precum şi grupurile factor corespunzătoare:

- *Dacă G este un grup abelian, atunci în oricare din următoarele cazuri*:
  - ***a)*** *G este un p-grup*,
  - ***b)*** *G este un grup de torsiune*,
  - ***c)*** *G este un grup fără-torsiune*,
  - ***d)*** *G este un grup mixt scindabil*,

  G are P.I.S.D. exact dacă, pentru orice $m\in\mathbf{N}^*$, mG are P.I.S.D.,

iar, cu anumite restricţii, în toate aceste cazuri,

4) *şi grupul factor G/mG are această proprietate*.

Desigur că, în determinarea cazurilor în care subgrupul G[m] al unui grup G cu P.I.S.D. ($m\in\mathbf{N}^*$), are şi el această proprietate, ne interesează doar cazurile în care $G[m]\neq 0$, deci *grupurile de torsiune şi cele mixte scindabile*; celelalte cazuri devin triviale.

- *În toate aceste cazuri*, *pentru orice $m\in\mathbf{N}^*$, G[m] are P.I.S.D.*; *reciproca nefiind*, *în general, adevărată*.

  Referitor la grupul factor G/G[m] avem următorul rezultat:

- *Fie G un grup abelian şi m un număr natural (nenul) oarecare. Atunci*:

grupul G/G[m] are P.I.S.D. exact dacă mG are această proprietate.

- *Dacă A este un grup abelian cu*:

  A[m]=0,

  pentru un număr natural m≥2 şi G este un subgrup pur în A, atunci:

  $G=H\oplus K$ *dacă şi numai dacă* $m^{-1}G=m^{-1}H\oplus m^{-1}K$.

  În aceste condiţii,

- *subgrupul G are P.I.S.D. exact dacă* $m^{-1}G$ *are această proprietate*.

Subgrupul Frattini al unui grup G, notat cu F(G) şi definit ca intersecţia tuturor subgrupurilor maximale ale lui G, a fost introdus prima dată de G. Frattini în 1885. Proprietăţile acestui subgrup au fost studiate şi prezentate în peste 200 de lucrări ştiinţifice apărute până acum. În ideea de a răspunde la întrebarea:

- „*Dacă G este un grup cu P.I.S.D., când F(G) are şi el P.I.S.D.?*”,

am ajuns la următorul rezultat:

- *Dacă G este un p-grup (sau un grup de torsiune, sau un grup divizibil, sau un grup fără-torsiune, sau un grup mixt scindabil) cu P.I.S.D., atunci şi F(G) are P.I.S.D.*, iar, *cu excepţia grupurilor divizibile*, în toate celelalte cazuri, *reciproca nu este*, în general, *adevărată*.

Referitor la grupul factor G/F(G), avem următorul rezultat:

- *Fie G un grup abelian cu P.I.S.D. şi F(G) subgrupul său Frattini. În oricare din următoarele situaţii, G/F(G) are P.I.S.D.*:
  - **a)** *G este un p-grup*,
  - **b)** *G este un grup de torsiune*,
  - **c)** *G este un grup liber*,
  - **d)** *G este un grup divizibil*,
  - **e)** *G este suma directă dintre un grup liber de rang finit şi un grup divizibil, fără-torsiune*,
  - **f)** *G este suma directă dintre un grup elementar, un grup divizibil, fără-torsiune şi un grup liber, de rang finit*.

Din [41, 32.2 şi 35.2] rezultă că:

- *Orice grup abelian conţine, pentru orice număr prim p, subgrupuri p-bazice, şi acestea sunt izomorfe. Dacă G este un grup cu P.I.S.D., în oricare din următoarele cazuri, subgrupul p-bazic al lui G, notat* B_G, *are P.I.S.D.*:
  - **a)** *G este un p-grup*,
  - **b)** *G este un grup de torsiune*,
  - **c)** *G este un grup fără-torsiune*,
  - **d)** *G este un grup mixt scindabil*.

Reciprocele acestor afirmaţii nu sunt, în general, *adevărate*.

Cu anumite restricţii asupra grupurilor fără-torsiune,

- *În toate cazurile prezentate mai sus grupul factor G/B_G are şi el P.I.S.D.*.

❖ În **Capitolul 3** – ***Module cu P.I.S.D.***, sunt prezentate caracterizări ale modulelor M, cu proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi, module care vor fi considerate peste diferite inele R, asociative, cu unitate. În general, acolo unde nu se precizează, modulele considerate vor fi stângi. Ca şi în capitolul întâi, orice altă condiţie (eventual suplimentară) asupra inelului R, sau R-modulelor M, se va pune ori de câte ori va fi cazul.

S-a început studiul R-modulelor cu P.I.S.D. cu modulele injective cu această proprietate. Referitor la aceste module sunt prezentate, aici:

- *condiţii necesare*,
- *condiţii suficiente*

şi,

- *condiţii necesare şi suficiente*

pentru ca un astfel de modul să aibă P.I.S.D.. S-a trecut apoi la descrierea sumelor directe de module cu P.I.S.D., prezentând noi soluţii la „*Problema 9**”, făcând şi un studiu al morfismelor unor astfel de sume de module. În cel de al treilea subcapitol s-au generalizat toate rezultatele de la subgrupurile şi grupurile factor ale unui grup cu P.I.S.D. la module peste diferite inele.

Aşa cum am precizat mai sus, în primul subcapitol (al acestui capitol) se prezintă o serie de caracterizări ale modulelor injective cu proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi. Pentru un R-modul injectiv M, se studiază condiţiile în care el are P.I.S.D.. De asemenea, se prezintă o caracterizare laticeală a modulelor cu C.P.I.S.D., precum şi noi soluţii la „*Problema 9**”. În finalul subcapitolului, prin exemplificări, am justificat lipsa oricărei legături dintre un R-modul M şi învelitoarea sa injectivă E(M), în problema intersecţiei sumanzilor direcţi.

O condiţie suficientă pentru ca un R-modul să aibă P.I.S.D., care se va dovedi foarte utilă în dezvoltările noastre viitoare, este următoarea:

- *Fie M un R-modul. Dacă pentru orice $\varphi\in End(M)$, $\ker\varphi$ este un sumand direct în M, atunci M are P.I.S.D.*; *reciproca nu este*, în general, *adevărată*, decât impunând anumite condiţii inelului End(M).

Două rezultate analoage celor din [97, Propoziţia 8] şi, respectiv [48, Teorema 3.3], vor permite obţinerea de noi soluţii „*Problemei 9**”:

- *Fie R un inel maximal de valuare* (în sensul lui Kaplansky, [56]), *care este şi un domeniu cu ideale principale, şi fie M un R-modul fără-torsiune, de rang numărabil. Dacă M este de forma*:

$M=D\oplus H$,

unde D este injectiv şi H este redus, de rang finit, atunci M are C.P.I.S.D.;

- *Fie R un inel Dedekind şi M un R-modul decompozabil, fără-torsiune. Dacă pentru orice submodul pur S, al lui M, există un submodul T, al lui M, astfel încât*:

  $M/S\cong T$,

  atunci M are C.P.I.S.D..

Rezultatele din [97, Lema 2] pot fi generalizate pentru un inel oarecare R:

- *Fie*:

  $$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

  un R-modul cu P.I.S.D., unde, pentru orice $i\in I$, M_i este un R-modul injectiv şi idecompozabil. Atunci au loc următoarele afirmaţii:

  a) *Pentru orice $i, j\in I$,*

  $Hom(M_i,M_j)=0$ *sau* $M_i\cong M_j$;

  b) *Dacă, pentru orice $i\in I$, M_i este şi proiectiv, atunci pentru orice $i, j\in I$,*

  $M_i\cong M_j$.

Următoarea reciprocă a acestui rezultat va permite (şi ea) obţinerea de noi soluţii pentru „*Problema 9**”:

- *Dacă*:

  $$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

  este un R-modul fără-torsiune astfel încât:

  a) *pentru orice $i, j\in I$,*

  $Hom(M_i,M_j)=0$ *sau* $M_i\cong M_j$;

  b) *pentru orice $i\in I$, $End(M_i)$ - inelul endomorfismelor lui M_i este un domeniu cu ideale principale*;

  atunci M are P.I.S.D..

Fie p un număr prim şi:

$B_k=\oplus_I \mathbf{Z}(p^k)$,

unde I este o mulţime oarecare de indici şi:

$k\in\mathbf{N}^*$ sau $k=\infty$.

În Capitolul 2 se demonstrează că există un grup abelian G astfel încât B_k să fie sumand direct în G dacă şi numai dacă:

($k=1$ şi I este oarecare) sau ($k\geq 2$ sau $k=\infty$ şi $|I|=1$).

Aşadar,

- *Partea de torsiune a unui grup abelian cu P.I.S.D. este o sumă directă de subgrupuri total invariante, fiecare având această proprietate.*

Acest rezultat se generalizează, în sensul că se demonstrează, folosind [78, p. 118-119], că:

- *Orice R-modul injectiv cu P.I.S.D. admite, abstracţie făcând de un izomorfism, o descompunere unică în sumanzi direcţi idecompozabili, total invarianţi.*

Următorul rezultat poate fi considerat o teoremă de structură pentru o clasă de R-module injective cu P.I.S.D.:

- *Fie R un inel artinian şi M - un R-modul injectiv.*
  - ***a)*** *Dacă M admite o descompunere directă în sumanzi direcţi total invarianţi, neizomorfi şi idecompozabili, atunci există o familie (finită) de ideale prime distincte $\{P_i\}_{i\in I}$, ale lui R, astfel încât:*

    $$M=\bigoplus_{i\in I} E(R/P_i).$$

  - ***b)*** ***i)*** *Dacă M are P.I.S.D. şi nu admite o descompunere directă în sumanzi direcţi total invarianţi, neizomorfi şi idecompozabili, atunci există o familie (finită) de ideale prime nedistincte $\{P_i\}_{i\in I}$, ale lui R, astfel încât:*

    $$M=\bigoplus_{i\in I} E(R/P_i).$$

    ii) *Dacă M are P.I.S.D. şi este (şi) proiectiv, atunci există un ideal prim P, al lui R, astfel încât:*

    $$M=\oplus_I E(R/P).$$

    În acest caz, dacă R este şi regular, atunci R/P este un spaţiu vectorial finit dimensional peste corpul endomorfismelor sale şi R/P este injectiv.

Fie M un R-modul drept. În general,

- *Dacă*:

  $$E=End(M)$$

  are P.I.S.D., nu rezultă că şi M are P.I.S.D., dar *dacă M este E-plat, acest lucru este adevărat*.

În particular,

- *Dacă M este fără-torsiune şi E este un domeniu cu ideale principale*,

caz în care orice endomorfism nenul al lui M este monomorfism, atunci:

- *M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă E are P.I.S.D.*.

În acelaşi context avem şi următorul rezultat:

- *Dacă M este un R-modul drept astfel încât*:

E=End(M)

este un inel regular şi M este E-plat, atunci E şi M au P.I.S.D..

Un studiu mai amănunţit al R-modulelor cu P.I.S.D. a impus introducerea conceptului dual proprietăţii intersecţiei sumanzilor direcţi, concept care va fi dezvoltat în capitolul următor:

- *Un R-modul (un grup abelian) M pentru care suma oricăror doi sumanzi direcţi* (adică submodulul (subgrupul) lui M generat de reuniunea lor) *este tot un sumand direct în M, se numeşte modul (grup) cu proprietatea sumei sumanzilor direcţi, prescurtat P.S.S.D.*;
- *Un R-modul (un grup abelian) M spunem că are complet (sau total) proprietatea sumei sumanzilor direcţi, prescurtat C.P.S.S.D. dacă suma oricărei familii de sumanzi direcţi* (adică submodulul (subgrupul) lui M generat de reuniunea lor) *este, de asemenea, un sumand direct în M*.

Fie M un R-modul. Notăm cu S(M) mulţimea tuturor submodulelor şi cu S_M mulţimea tuturor sumanzilor direcţi, ai lui M.

- *Dacă M are şi P.I.S.D. şi P.S.S.D., atunci S_M este o latice* (adică S_M este o sublatice a laticii S(M) a tuturor submodulelor lui M),

iar:

- *Dacă M are şi C.P.I.S.D. şi C.P.S.S.D., atunci S_M este o latice completă*, adică S_M este o sublatice completă a laticii S(M) a tuturor submodulelor lui M.

În acelaşi context avem:

- *Dacă R este un domeniu local Dedekind şi M este un R-modul care are un submodul divizibil nenul, atunci M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă S_M este o latice completă*.

Wilson, în [97], a demonstrat că în cazul unui inel asociativ cu unitate, R,

- *Toate R-modulele proiective au P.I.S.D. dacă şi numai dacă R este ereditar stâng*.

Noi am demonstrat un rezultat analog, pentru R-module injective, în cazul unui inel artinian:

- *Dacă R este un inel artinian, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:
  - ***a)*** *Toate R-modulele injective au P.I.S.D.*;
  - ***b)*** *Inelul R este ereditar stâng*;
  - ***c)*** *Toate R-modulele injective au P.S.S.D.*.

În general, *acest ultim rezultat nu este adevărat pentru un inel noetherian*.

În problema intersecţiei sumanzilor direcţi, între un R-modul M şi E(M) - învelitoarea injectivă a lui M, în general, *nu există nici o legătură*. Acest fapt este exemplificat pentru grupuri abeliene. Astfel:

- *Există grupuri abeliene M, pentru care M şi E(M) au P.I.S.D.*;
- *Există grupuri abeliene M cu P.I.S.D., pentru care E(M) nu are P.I.S.D.*;
- *Există grupuri abeliene M, pentru care M şi E(M) nu au P.I.S.D.*;
- *Există grupuri abeliene M, care nu au P.I.S.D., dar pentru care E(M) are această proprietate*.

Se ştie că, în general:

- *Fiind dat un R-modul M, intersecţia a două submodule injective ale lui M nu este (tot) un submodul injectiv (al lui M)*, dar, *dacă M are P.I.S.D., acest lucru se întâmplă*.

În acest context avem şi următorul rezultat:

- *Dacă M este un R-modul şi E(M) este învelitoarea sa injectivă, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:
  - ***a)*** *E(M) are P.I.S.D.*;
  - ***b)*** *Pentru orice submodule T şi S, ale lui M, are loc egalitatea*:

$$E(T)\cap E(S)=E(T\cap S).$$

Aşa cum am mai precizat, rezultatele obţinute referitoare la subgrupurile şi grupurile factor ale unui grup abelian cu P.I.S.D., se generalizează la submodule şi module factor ale modulelor cu P.I.S.D., module considerate peste diferite inele asociative, comutative, cu unitate. Ca şi în cazul grupurilor, se studiază condiţiile necesare şi/sau suficiente pentru ca anumite submodule ale R-modulului M, cu P.I.S.D., care nu sunt, neapărat, sumanzi direcţi, şi modulele factor corespunzătoare, să aibă P.I.S.D.. Astfel, fiind dat un R-modul M, cu P.I.S.D., se investighează submodulele de tipul celor studiate la grupuri, şi anume:

- *rM*,
- *M[r]*,
- $r^{-1}M$ (în acest caz M este un submodul al unui R-modul K, iar r este un element oarecare (neinversabil) al inelului R - inel asociativ, comutativ, cu unitate),
- *F(M)* - submodul Frattini al lui M

şi:

- N_M - submodulul p - bazic al lui M, pentru un p - element prim oarecare, al lui R,

precum şi R-modulele factor corespunzătoare.

Soluţii la „*Problema 9**” sunt prezentate pe tot parcursul cărţii. Pentru a „*mări*” mulţimea soluţiilor acestei probleme se studiază sumele directe de R-module (grupuri abeliene) cu P.I.S.D., în sensul că se prezintă alte soluţii ale acestei noi probleme (atât pentru R-module, cât şi pentru grupuri abeliene), se

realizează un studiu al nucleelor şi imaginilor morfismelor de sume directe de R-module, ale cărui rezultate le vom aplica la sumele directe de R-module cu P.I.S.D.. În acest sens am notat cu:

$M^*=\oplus_I M$,

unde M este un R-modul (grup abelian), iar I este o mulţime oarecare de indici.

Următorul rezultat caracterizează sumele directe de R-module injective cu P.I.S.D. şi se va dovedi util în studiul grupurilor abeliene cu această proprietate:

- *Dacă R este un domeniu noetherian şi M este un R-modul injectiv, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:
  - ***a)*** *Pentru orice mulţime de indici I, R-modulul M* are P.I.S.D.*;
  - ***b)*** *M este fără-torsiune*.

În mod analog se pot obţine condiţii pentru anumite module peste domenii dedekindiene:

- *Dacă R este un domeniu Dedekind şi M este un R-modul cu următoarele proprietăţi*:
  - ***a)*** *M are P.I.S.D.*,
  - ***b)*** *M are un sumand direct D≠0, injectiv maximal*,
  - ***c)*** *pentru fiecare ideal prim P (al lui R), P-componenta (redusă) de torsiune M_P a lui M este un sumand direct, care este elementar*,

  atunci au loc următoarele afirmaţii:
  - ***1)*** *Dacă D este de torsiune, atunci, pentru orice mulţime de indici I, cu | I |≥2, R-modulul M* nu are P.I.S.D.*;
  - ***2)*** *Dacă D este fără-torsiune, atunci*:

    R-modulul M are P.I.S.D., pentru orice mulţime de indici I, dacă şi numai dacă I este finită*.

Acest ultim rezultat are aplicabilitate la module peste domenii cu ideale principale, în particular la grupurile abeliene.

Considerăm un grup abelian G, cu P.I.S.D., I o mulţime (oarecare) de indici, cu proprietatea că | I |≥2, şi:

$G^*=\oplus_I G$.

- *Dacă G este de torsiune* (în particular, un p-grup), *atunci*:

  G are P.I.S.D., pentru orice mulţime de indici I, dacă şi numai dacă G este elementar*.
- *Dacă G este fără-torsiune şi complet decompozabil, atunci, cu o singură excepţie (G nu satisface la condiţiile de la [55, Lema 10])*,

  grupul G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă mulţimea I este finită*.

Se ştie că:

- *Dacă G este un grup abelian astfel încât G^* are P.I.S.D., atunci End(G) - inelul endomorfismelor grupului G are anumite proprietăţi*, de exemplu: *End(G) poate fi un inel cu ideale principale, un inel local, sau un inel semi-local. Reciproca acestei afirmaţii*, în general, *nu este adevărată*, adică, *dacă G este un grup abelian cu P.I.S.D. şi End(G) este inelul endomorfismelor lui G, atunci, în nici una din următoarele cazuri, nu rezultă că G^* are P.I.S.D.*:
  - ***a)*** *dacă End(G) este un inel cu ideale principale*,
  - ***b)*** *dacă End(G) este un inel local*,
  - ***c)*** *dacă End(G) este un inel semi-local*.

Pentru a descrie morfismele de sume directe de R-module, descrieri care, în continuare, vor fi utilizate pentru a caracteriza unele sume directe de R-module cu P.I.S.D., se consideră un inel asociativ, comutativ, cu unitate, notat cu R, $\{M_j\}_{j\in J}$ şi $\{N_i\}_{i\in I}$ două famili de R-module şi:

$$f : \bigoplus_{j\in J} M_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i$$

un morfism oarecare de R-module, unde I şi J sunt două mulţimi oarecari de indici. Fie, deci R, $\{M_j\}_{j\in J}$, $\{N_i\}_{i\in I}$ şi f ca şi mai sus. Atunci:

- *f induce o familie dublu indexată $\{ f_j^i : M_j \to N_i\}_{(i,j)\in I\times J}$*,

unde:

$$f_j^i = p^i \circ f \circ u_j, \qquad \text{iar} \qquad u_j : M_j \to \bigoplus_{j\in J} M_j$$

este a j-a injecţie canonică,

$$p^i : \bigoplus_{i\in I} N_i \to N_i$$

este a i-a proiecţie canonică şi putem defini funcţiile:

$$f_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i, \qquad f_j = f \circ u_j$$

şi:

$$f^i : \bigoplus_{j\in J} M_j \to N_i, \qquad f^i = p^i \circ f.$$

Atunci,

- *pentru orice $j\in J$, familia $\{ f_j^i \}_{i\in I}$ este aproape peste tot trivială.*

Orice sistem dublu indexat de morfisme de R-module:

$$\{ f_j^i : M_j \to N_i\}_{(i,j)\in I\times J}$$

poate fi reprezentat sub forma unei matrici de ordin I×J. Dacă notăm cu $M^{*}_{I\times J}$ mulţimea matricilor de ordin I×J, a căror elemente sunt morfisme de R-module:

$f^{i}_{j} : M_j \to N_i$,

cu proprietatea că, pentru orice $j\in J$, familia $\{ f^{i}_{j} \}_{i\in I}$ este aproape peste tot trivială, şi notăm cu:

$A(f)=A(f^{i}_{j})\in M^{*}_{I\times J}$

- matricea determinată de (sau care determină) aplicaţia f, atunci:

- *există un izomorfism de R-module*:

$$\Psi : Hom(\bigoplus_{j\in J} M_j, \bigoplus_{i\in I} N_i) \to M^{*}_{I\times J}, \qquad \Psi(f)=A(f)\in M^{*}_{I\times J} .$$

Rezultă că:

- *Dacă $\{M_i\}_{i\in I}$ este o familie de R-module, atunci algebra endomorfismelor R-modulului $\bigoplus_{i\in I} M_i$, faţă de adunarea şi compunerea obişnuită a funcţiilor şi înmulţirea acestora cu un scalar, este izomorfă cu algebra matricilor pătratice M^{*}_{I}, a căror elemente sunt morfisme*:

  $f^{i}_{j} : M_j \to M_i$

  cu proprietatea că, pentru orice $j\in J$, familia $\{ f^{i}_{j} \}_{i\in I}$ este aproape peste tot trivială, algebră socotită în raport cu adunarea şi înmulţirea obişnuită a matricilor şi înmulţirea acestora cu un scalar din R;

în particular,

- *Dacă M este un R-modul, atunci inelul endomorfismelor R-modulului $\oplus_I M$ este izomorf cu inelul matricilor pătratice M^{*}_{I}, a căror elemente sunt endomorfisme (ale lui M) şi a căror coloane au un număr finit de elemente nenule, inel socotit în raport cu adunarea şi înmulţirea obişnuită a matricelor*.

Deoarece studiul R-modulelor cu P.I.S.D. se poate face cu ajutorul nucleelor de endomorfisme, s-a impus determinarea proprietăţilor fundamentale ale acestora. În acest sens, pentru un morfism:

$f : \bigoplus_{j\in J} M_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i$

am prezentat o listă cu câteva proprietăţi elementare referitoare la kerf şi Imf, rezultate care, în secţiunea următoare, vor fi folosite pentru a caracteriza sumele directe de R-module cu P.I.S.D.:

- $kerf=\bigcap_{i\in I}\ker f^i$,
- $Imf=\bigoplus_{i\in I} Imf^i=\sum_{(i,j)\in I\times J}\operatorname{Im} f_j^i$,
- $\bigoplus_{j\in J} kerf_j\leq kerf$,
- *Pentru orice* $j\in J$,

  $kerf_j=\bigcap_{i\in I}\ker f_j^i$ *şi* $Imf_j=\bigoplus_{i\in I} Im\, f_j^i$,
- *Pentru orice* $i\in I$,

  $\bigoplus_{j\in J} ker\, f_j^i\leq kerf^i$ *şi* $Imf^i=\sum_{j\in J}\operatorname{Im} f_j^i$.

Se ştie că:

- *Dacă R-modulul M are proprietatea că End(M) este un inel regular, atunci, pentru orice N - sumand direct în M, inelul endomorfismelor lui N este regular*, dar *reciproca*, în general, *este falsă*, adică: *dacă*,

  $M=\bigoplus_{k\in K} M_k$

  şi, pentru orice $k\in K$,

  $E_k=End(M_k)$

  este un inel regular, nu rezultă că:

  $E=End(M)$

  este (şi el) un inel regular - vezi [94, Lema 3.3 şi Exemplul 3.4]. Dar, *acest lucru este adevărat dacă* $\{M_k\}_{k\in K}$ *este o familie de sumanzi direcţi total invarianţi, ai lui M*.

  Am precizat mai sus că:
- *mulţimea R-modulelor M cu proprietatea că End(M) este un inel regular este strict inclusă în mulţimea R-modulelor cu P.I.S.D.*.

Dar, există cazuri în care proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi pentru un R-modul M implică End(M) - inel regular. De exemplu:

- *Dacă M este un R-modul cu P.I.S.D., atunci în oricare din următoarele cazuri, End(M) este regular*:
  - ***a)*** *dacă* $\{M_k\}_{k\in K}$ *este o familie de R-module simple şi*:

    $M=\bigoplus_{k\in K} M_k$;
  - ***b)*** *dacă* $\{M_k\}_{k\in K}$ *este o familie de R-module idecompozabile*,

    $M=\bigoplus_{k\in K} M_k$

şi $M\oplus M$ *are P.I.S.D.*;

c) *dacă M este un R-modul idecompozabil astfel încât, pentru orice mulţime de indici I, R-modulul*:

$$M^*=\oplus_I M$$

are P.I.S.D. şi End(M) este un inel local;

d) *dacă* $\{M_k\}_{k\in K}$ *este o familie de R-module injective idecompozabile cu proprietatea că*:

$$M=\bigoplus_{k\in K} M_k$$

are P.I.S.D.;

e) *dacă*:

$$M=\bigoplus_{k\in K} M_k$$

este un R-modul fără-torsiune astfel încât: pentru orice $k\in K$, $End(M_k)$ *este un domeniu cu ideale principale şi, pentru orice* $i, j\in K$, $i\neq j$,

$$Hom(M_i,M_j)=0 \qquad \text{sau} \qquad M_i\cong M_j;$$

f) *dacă*:

$$M=\bigoplus_{k\in K} M_k$$

este un R-modul astfel încât: pentru orice $k\in K$,

$$E_k=End(M_k)$$

este un inel ereditar (drept), pentru orice $k\in K$, M_k *este un R-modul idecompozabil,* E_k*-plat (stâng) şi auto-mic şi, pentru orice* $i, j\in K$, $i\neq j$,

$$Hom(M_i,M_j)=0 \qquad \text{sau} \qquad M_i\cong M_j.$$

❖ În **Capitolul 4** – ***Module cu P.S.S.D.*** am încercat o rezolvare a problemei duale problemei intersecţiei sumanzilor direcţi, prezentând câteva soluţii la problema caracterizării modulelor cu proprietatea sumei sumanzilor direcţi (prescurtat P.S.S.D.) şi realizând o serie de legături între modulele, în particular între grupurile abeliene, cu P.I.S.D. şi cele cu P.S.S.D.. Ideea a plecat de la [84], unde am introdus conceptul de „*R-modul (grup abelian) cu proprietatea sumei sumanzilor direcţi*", concept descris mai sus, şi am propus spre rezolvare următoarea problemă deschisă:

- „*Să se caracterizeze R-modulele (grupurile abeliene) cu proprietatea sumei sumanzilor direcţi*".

Această problemă este duala problemei lui Kaplansky - Fuchs, la care s-a referit, până aici, prezenta carte.

Trebuie să precizăm că, conceptul de R-modul cu proprietatea sumei sumanzilor direcţi a fost introdus prima dată de J. L. Garcia în [44], iar prezentarea acestui concept în [84] s-a făcut independent de acest lucru; de fapt contextele de prezentare şi utilizare a acestuia diferă în totalitate.

În acest capitol se prezintă diverse caracterizări ale R-modulelor cu P.S.S.D., rezultate referitoare la anumite clase de R-module (injective sau proiective) peste diferite inele, precum şi rezultate referitoare la grupurile abeliene cu această proprietate.

Ca şi în „*cazul P.I.S.D.*”, am notat cu R un inel asociativ, cu unitate, iar modulele au fost considerate (stângi) peste aceste inele.

În primul subcapitol se prezintă rezultate cu caracter general. Desigur că primele rezultate obţinute la această problemă sunt analoage celor de la R-modulele cu P.I.S.D.:

- *Dacă R-modulul M este de forma*:

  $$M=\bigoplus_{i\in I} M_i,$$

  unde, pentru orice $i\in I$, M_i *este total invariant în M, atunci M are P.S.S.D. (respectiv C.P.S.S.D.) dacă şi numai dacă, pentru orice* $i\in I$, M_i *are P.S.S.D. (respectiv C.P.S.S.D.)*;

în particular,

- *Dacă R este un domeniu cu ideale principale, P este mulţimea tuturor elementelor prime neasociate, din R, şi*:

  $$M=\bigoplus_{p\in P} M_p$$

  este un R-modul de torsiune, *descompus conform lui [70, 6.11.3], atunci M are P.S.S.D. (respectiv C.P.S.S.D.) dacă şi numai dacă, pentru orice* $p\in P$, M_p *are P.S.S.D. (respectiv C.P.S.S.D.)*.

  O caracterizare duală a R-modulelor cu P.S.S.D. este următoarea:

- *Dacă R-modulul M are P.S.S.D., atunci au loc următoarele afirmaţii*:
  - ***a)*** *Pentru orice descompunere directă de forma*:

    $$M=A\oplus B$$

    şi orice morfism:

    $$f: A\to B,$$

    Imf este un sumand direct în B;

b) *Dacă A şi B sunt două R-module idecompozabile şi A⊕B este un sumand direct în M, atunci*:

i) *Hom(A,B)=0*,

sau:

ii) *dacă există 0≠f∈Hom(A,B), atunci f este un epimorfism*.

Spre deosebire de „*cazul P.I.S.D.*”,

- *reciprocele acestor ultime afirmaţii nu sunt*, în general, *adevărate*.

Putem clasifica anumite inele R în termenii în care R-modulele M au P.S.S.D. şi putem îmbunătăţii rezultatele obţinute până acum:

- *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru un inel R*:
  - **a)** *R este artinian semi-simplu*;
  - **b)** *Toate R-modulele au C.P.S.S.D.*;
  - **c)** *Toate R-modulele au P.S.S.D.*;
  - **d)** *Toate R-modulele proiective au P.S.S.D.*.

Rezultă că dacă toate R-modulele proiective au P.S.S.D., atunci R este ereditar stâng; *reciproca nu este*, în general, *adevărată*.

„*Caracterul ereditar*” al unui inel R este echivalent cu faptul că toate R-modulele injective au P.S.S.D.; acesta va conduce la concluzia că:

- *orice grup abelian divizibil are P.S.S.D., deoarece inelul* ***Z*** *este ereditar*.

Şi *modulele cu P.S.S.D., peste orice inel noetherian*, ca şi cele cu P.I.S.D., *au un unic sumand direct injectiv maximal*. Folosind acest rezultat putem caracteriza modulele injective peste domenii artiniene:

- *Dacă R este un inel comutativ artinian şi M este un R-modul injectiv, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:
  - **a)** *M are P.I.S.D.*;
  - **b)** *M are C.P.I.S.D.*;
  - **c)** *M are C.P.S.S.D.*;
  - **d)** *M are P.S.S.D.*.

Acum putem prezenta o caracterizare mai cuprinzătoare a unor inele comutative artiniene:

- *Dacă R este un domeniu noetherian, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:
  - **a)** *R este semi-simplu*;
  - **b)** *Toate R-modulele au C.P.S.S.D.*;
  - **c)** *Toate R-modulele au P.S.S.D.*;
  - **d)** *Toate R-modulele proiective au P.S.S.D.*;

e) *Toate R-modulele au C.P.I.S.D.*;
f) *Toate R-modulele au P.I.S.D.*;
g) *Toate R-modulele injective au P.I.S.D.*;
h) *Toate R-modulele injective au C.P.I.S.D.*;
i) *Toate R-modulele injective au P.S.S.D.*;
j) *Toate R-modulele injective au C.P.S.S.D.*;
k) *R este ereditar stâng*;
l) *Pentru orice R-modul M, S_M este o latice completă*;
m) *Pentru orice R-modul M, S_M este o latice*;
n) *Pentru orice R-modul injectiv M, S_M este o latice completă*;
o) *Pentru orice R-modul injectiv M, S_M este o latice*;
p) *Orice R-modul injectiv M este*:

α) *fără-torsiune şi pentru orice sumand direct idecompozabil A, al lui M, End(A) este un inel cu diviziune*,

sau:

β) *de torsiune, şi orice sumand direct idecompozabil al lui M este total invariant în M*.

Dacă un R-modul M are P.S.S.D., atunci şi inelul endomorfismelor sale are aceeaşi proprietate, fapt ce va permite o caracterizare a inelelor R cu P.S.S.D. (ca R-module drepte).

În ultimul subcapitol al acestei cărţi se studiază câteva clase de grupuri abeliene cu P.S.S.D.. Mai întâi se arată că există anumite clase de grupuri abeliene care dacă au P.I.S.D., au şi P.S.S.D.:

- *Dacă G este un grup abelian cu P.I.S.D., atunci în oricare din următoarele cazuri, G are P.S.S.D.*:
  - **a)** *G este un p-grup care este sau divizibil, sau redus*;
  - **b)** *G este un grup de torsiune, ale cărui p-componente satisfac la condiţiile de la punctul a)*;
  - **c)** *G este un grup divizibil*;
  - **d)** *G este un grup fără-torsiune, de forma*:

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i,$$

unde: pentru orice $i\in I$, G_i este un grup (redus) de rang unu, pentru orice $i_1, i_2\in I$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$) sunt tipuri incomparabile;

  - **e)** *G este un grup mixt scindabil, de forma*:

$$G=D\oplus T,$$

unde D este divizibil, fără-torsiune, iar T este redus, de torsiune.

Nu întotdeauna, în cazul grupurilor abeliene, P.I.S.D. implică P.S.S.D., sau invers; adică:

- *Există grupuri abeliene care au şi P.I.S.D. şi P.S.S.D.*;
- *Există grupuri abeliene care nu au P.I.S.D., dar au P.S.S.D.*;
- *Există grupuri abeliene care au P.I.S.D., dar nu au P.S.S.D.*;
- *Există grupuri abeliene care nu au nici P.I.S.D., nici P.S.S.D.*.

În determinarea structurii grupurilor abeliene cu P.S.S.D. un rol important l-au avut următoarele rezultate:

- *Pentru orice* $m, n \in \mathbf{N}^*$, *cu proprietatea că cel puţin unul din ele este mai mare sau egal cu 2, grupul* $\mathbf{Z}(p^m)\oplus\mathbf{Z}(p^n)$ *nu are P.S.S.D.*;
- *Pentru orice* $n \in \mathbf{N}^*$, *grupul* $\mathbf{Z}(p^n)\oplus\mathbf{Z}(p^\infty)$ *nu are P.S.S.D.*.

Astfel am demonstrat că:

- *Un p-grup are P.S.S.D. exact dacă este sau elementar, sau divizibil, sau indecompozabil*;

iar,

- *Un grup abelian de torsiune G are P.S.S.D. dacă şi numai dacă*:

$$G=(\bigoplus_{p\in P_1} A_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_2} B_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_3} C_p),$$

unde:

  - P_1, P_2 *şi* P_3 *sunt submulţimi, disjuncte două câte două, ale mulţimii* $\mathbf{P}$ *a tuturor numerelor prime*;
  - *pentru orice* $p \in P_1$, A_p *este un p-grup idecompozabil*;
  - *pentru orice* $p \in P_2$, B_p *este un p-grup p-mărginit*

  şi,

  - *pentru orice* $p \in P_3$, C_p *este un p-grup divizibil.*

În cazul grupurilor fără-torsiune teorema de structură este:

- *Dacă G este un grup fără-torsiune, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:
  - ***a)*** *G are D.S.S.P.*;
  - ***b)*** *G are una din următoarele forme*:

    i) *G este divizibil,*

    sau:

    ii) *G este redus şi idecompozabil*,

    sau:

    iii) $G=\bigoplus_{i\in I} G_i$,

unde:

- *pentru fiecare* $i\in I$, G_i *este un grup redus, idecompozabil, pentru fiecare* $i_1, i_2\in I$, $i_1\neq i_2$,

$$Hom(G_{i_1}, G_{i_2})=Hom(G_{i_2}, G_{i_1})=0;$$

iar pentru grupurile mixte scindabile avem următoarea caracterizare:

- *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru orice grup mixt scindabil G*:
  - ***a)*** *G are P.S.S.D.*;
  - ***b)*** *G are una din următoarele forme*:

    i) $G=D\oplus A$,

    sau:

    ii) $G=H\oplus A$,

    unde:

    - *D este fără-torsiune şi divizibil*;
    - *A este un grup de forma (87)*;
    - *H este un grup redus, fără-torsiune de forma (89) sau de forma (90), pentru orice p-componentă ne-elementară a lui A orice sumand direct al lui H este p-divizibil şi pentru orice doi sumanzi direcţi, distincţi, idecompozabili T şi S ai lui H,*

$$Hom(T,S)=0.$$

Putem afirma că, exceptând grupurile mixte nescindabile, cunoaştem structura tuturor grupurilor cu P.S.S.D..

Toate rezultatele din ultimele trei capitole sunt conţinute în lucrările [80] - [91] din bibliografia de la sfârşitul lucrării.

Notaţiile utilizate în acestă carte sunt cele clasice:

- *G*, pentru un grup abelian în notaţie aditivă,
- $h_p^G(g)$, pentru p-înălţimea lui $g\in G$ (în G),
- *o(g)*, pentru ordinul grupului G,
- *r(G)*, pentru rangul grupului G,
- $r_0(G)$, pentru rangul fără-torsiune al grupului G,
- $r_p(G)$, pentru p-rangul grupului G, unde p este un număr prim.
- *t(G)*, pentru tipul grupului G,
- τ, pentru tipul grupului (**Q**,+),
- $\div$, pentru tipuri incomparabile,
- *R*, pentru un inel asociativ, cu unitate,

- ***P***, pentru mulţimea tuturor numerelor prime / elementelor prime neasociate din inelul R,
- Mod_R, pentru categoria R-modulelor,
- *P(M)*, pentru categoria R-modulelor finit M-proiective,
- $P^{\infty}(M)$, pentru categoria R-modulelor M-proiective,
- *E*, pentru inelul End(M) al tuturor endomorfismelor R-modulului M,
- Mod_E, pentru categoria E-modulelor,
- *P(E)*, pentru categoria E-modulelor finit generate şi proiective,
- $P^{\infty}(E)$, pentru categoria E-modulelor proiective,
- *E(M)*, pentru învelitoarea injectivă a R-modulului M,
- $| I |$, pentru cardinalul mulţimii I.

Ori de câte ori s-a impus, pentru uşurarea redactării, s-au făcut notaţii speciale, pricizându-se, de fiecare dată, semnificaţia acestora.

După cum se poate constata din prezentarea făcută până aici, fiecare capitol este alcătuit din subcapitole, iar fiecare subcapitol este alcătuit din secţiuni. Cu excepţia câtorva rezultate elementare, prezentate la început de capitol, sau subcapitol, şi având un caracter general, toate rezultatele prezentate sunt numerotate cu trei, respectiv patru numere, indicând (de la stânga la dreapta) numărul capitolului, al subcapitolului, al secţiunii, iar ultimul al rezultatului respectiv în acea secţiune.

Sfârşitul unei demonstraţii sau al unui enunţ care nu se va demonstra, se va marca prin simbolul „□”.

Cluj-Napoca, *Autorul*
22 ianuarie 2018

CAPITOLUL 1
PRELIMINARII

În acest prim capitol vom prezenta cele mai importante rezultate obţinute, în prima etapă, în problema intersecţiei sumanzilor direcţi, pentru R-module, în particular, pentru grupuri abeliene.

Fie R un inel asociativ, cu unitate.

Definiţie: *Un R-modul (un grup abelian) M spunem că are proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi, prescurtat P.I.S.D., dacă intersecţia oricăror doi sumanzi direcţi, ai lui M, este tot un sumand direct în M.*

Definiţie: *Un R-modul (un grup abelian) M spunem că are complet (sau total) proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi, prescurtat C.P.I.S.D., dacă intersecţia oricărei familii de sumanzi direcţi, ai lui M, este tot un sumand direct în M.*

Observaţia 1.1: *Dacă un R-modul (un grup abelian) M are C.P.I.S.D., atunci el are şi P.I.S.D.; reciproca nefiind, în general, adevărată (vezi (2.1.1)).* □

Începem cu grupurile abeliene cu P.I.S.D..

1.1. CARACTERIZĂRI ALE GRUPURILOR ABELIENE CU P.I.S.D.

În problema caracterizării grupurilor abeliene cu P.I.S.D., rezultatele prezentate în acest subcapitol şi datorate lui F. F. Kamalov (vezi [55]), au avut un rol fundamental.

Peste tot în acest subcapitol vom folosi următoarele notaţii:

- *G*, pentru un grup abelian în notaţie aditivă,
- $G[p]=\{g\in G/pg=0\}$,
- $h_p^G(g)$, pentru p-înălţimea lui $g\in G$ (în G),
- *o(g)*, pentru ordinul grupului G,
- *r(G)*, pentru rangul grupului G,
- *t(G)*, pentru tipul grupului G,
- τ, pentru tipul grupului (**Q**,+),
- $\div$, pentru tipuri incomparabile,
- Γ, pentru mulţimea tipurilor tuturor subgrupurilor (sumanzilor direcţi) G_i, $i\in I$, dintr-o descompunere de forma (1) a grupului G - fără-torsiune şi complet decompozabil,

- *$I(t_0)=\{i\in I \,/\, t(G_i)=t_0\}$*, relativ la o descompunere a grupului G, de forma (1).

Observaţia 1.1.1: *Fie G un grup cu P.I.S.D. (C.P.I.S.D.) şi fie T un sumand direct în G. Deoarece intersecţia oricăror doi (oricărei familii de) sumanzi direcţi ai lui T este un sumand direct în G, dar conţinut în T, rezultă că T are şi el P.I.S.D. (C.P.I.S.D.). Aşadar orice sumand direct al unui grup cu P.I.S.D. (C.P.I.S.D.) are şi el această proprietate.* □

Următorul rezultat este o reciprocă a afirmaţiei de la (1.1.1).

***Lema 1.1.2**: Fie,*

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i$$

o descompunere directă a grupului G astfel încât, pentru orice $i\in I$, G_i este un sumand direct total invariant în G. Atunci grupul G are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.) dacă şi numai dacă, pentru orice $i\in I$, G_i are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.).

***Demonstraţie*:** Conform cu (1.1.1) este necesar să demonstrăm doar „*suficienţa*" afirmaţiei din enunţ. Fie, deci, G un grup ca şi în enunţ, cu fiecare G_i, $i\in I$, total invarint în G şi având P.I.S.D.. Considerăm doi sumanzi direcţi (oarecari) T şi S ai lui G,

$$G=T\oplus T'=S\oplus S'.$$

Atunci, conform ipotezei şi lui [41, 9.3], pentru orice $i\in I$,

$$G_i=(S\cap G_i)\oplus(S'\cap G_i)=(T\cap G_i)\oplus(T'\cap G_i).$$

Rezultă că:

$$G=\bigoplus_{i\in I}[(S\cap G_i)\oplus(S'\cap G_i)]=[\bigoplus_{i\in I}(S\cap G_i)]\oplus[\bigoplus_{i\in I}(S'\cap G_i)]$$

şi:

$$S=\bigoplus_{i\in I}(S\cap G_i).$$

Analog obţinem că:

$$T=\bigoplus_{i\in I}(T\cap G_i).$$

Atunci:

$$T\cap S=[\bigoplus_{i\in I}(T\cap G_i)]\cap[\bigoplus_{i\in I}(S\cap G_i)]=\bigoplus_{i\in I}[(T\cap G_i)\cap(S\cap G_i)].$$

Conform ipotezei, $(T\cap G_i)\cap(S\cap G_i)$ este un sumand direct în G, deci $T\cap S$ este şi el un sumand direct în G şi, astfel, G are P.I.S.D.. Demonstraţia lemei pentru C.P.I.S.D. este analoagă. □

O consecinţă imediată a lui (1.1.2) este:

Corolarul 1.1.3: *Un grup de torsiune G are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.) dacă şi numai dacă fiecare p-componentă primară a sa (vezi [41, 8.4]) are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.).*

***Demonstraţie*:** Fiecare p-componentă primară a unui grup de torsiune G este un sumand direct total invariant în G, deci, se poate aplica (1.1.2). □

Următorul rezultat caracterizează p-grupurile, de rang cel puţin egal cu 2, cu P.I.S.D. şi va permite demonstrarea teoremei de structură a p-grupurilor cu această proprietate.

Lema 1.1.4: *Fie G un p-grup cu P.I.S.D., de rang cel puţin egal cu 2. Atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1. *Pentru orice* $g\in G[p]$,

   $h_p^G(g)=0$ *sau* $h_p^G(g)=\infty$;

2. $G=B\oplus C$,

   unde:
   - $pB=0$, $C=0$ *sau* $C\cong \mathbf{Z}(p^\infty)$.

***Demonstraţie*:** Fie G un grup ca şi în enunţ. Presupunem că există $g\in G[p]$, cu:

$$h_p^G(g)=k \quad \text{şi} \quad 0<k<\infty.$$

Atunci $g\in p^kG$; deci, există $a\in G$ astfel încât:

$$p^k a=g.$$

Deoarece:

$$p\cdot g=0,$$

rezultă că:

$$o(a)=p^{k+1}.$$

Pe de altă parte, <a> este un subgrup pur al lui G, deci, conform cu [24, 4.3.1], <a> este un sumand direct în G; aşadar,

$$G=G_1\oplus\langle a\rangle. \qquad (*)$$

Dar, pentru orice $b\in G_1[p]$,

$$o(a+b)=p^{k+1}.$$

Deci, raţionând ca şi mai sus, obţinem că:

$$G=G_2\oplus\langle a+b\rangle.$$

Fie $x\in\langle a\rangle\cap\langle a+b\rangle$. Atunci:

$$x=n\cdot a=m\cdot a+m\cdot b.$$

Deci:

$$a\cdot(n-m)=m\cdot b=0,$$

datorită descompunerii (∗). Rezultă că:

$$m=r\cdot p \quad \text{şi} \quad n=q\cdot p,$$

cu r, $q\in\mathbf{N}$. Aşadar, $x\in\langle p\cdot a\rangle$ şi $\langle a\rangle\cap\langle a+b\rangle\subseteq\langle p\cdot a\rangle$. Deoarece $\langle p\cdot a\rangle\subseteq\langle a\rangle\cap\langle a+b\rangle$, rezultă că:

$$\langle a\rangle\cap\langle a+b\rangle=\langle p\cdot a\rangle.$$

În concluzie, G are doi sumanzi direcţi, $\langle a\rangle$ şi $\langle a+b\rangle$, a căror intersecţie nu este un sumand direct, căci $\langle p\cdot a\rangle$ este un subgrup al unui grup idecompozabil. Am obţinut astfel o contradicţie cu ipoteza; presupunerea făcută este falsă şi prima afirmaţie din enunţul teoremei este demonstrată. Acum, fie Ω mulţimea sumanzilor direcţi p-mărginiţi ai lui G şi $\{A_0,A_1,\ldots,A_n,\ldots\}$ o submulţime total ordonată a lui Ω. Atunci:

$$A=\langle\bigcup_{i\geq 0}A_i\rangle$$

este un subgrup al lui G şi, conform lui [65, p. 151], A este sumand direct în G. Conform Lemei lui Zorn, există în Ω un element maximal B, astfel încât:

$$G=B\oplus C.$$

Fie $g\in C[p]$. Dacă:

$$h_p^G(g)=0,$$

Atunci:

$$C=\langle g\rangle\oplus D \qquad \text{şi} \qquad B\oplus\langle g\rangle\in\Omega,$$

ceea ce contrazice maximalitatea lui B. Deci, conform condiţiei 1) din enunţul teoremei, pentru orice $g\in C[p]$, avem că:

$$h_p^G(g)=\infty.$$

Dar, atunci, abstracţie făcând de un izomorfism, C este o sumă directă de exemplare de $\mathbf{Z}(p^\infty)$. Presupunem că C are un sumand direct de forma $T\oplus S$, unde T şi S sunt izomorfe cu $\mathbf{Z}(p^\infty)$. Fie:

$$T=\langle a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\rangle,$$

cu relaţiile:

$$p\cdot a_1=0, \qquad p\cdot a_2=a_1, \qquad \ldots, \qquad p\cdot a_n=a_{n-1}, \qquad \ldots$$

și:

$$S=\langle b_1,b_2,\ldots,b_n,\ldots\rangle,$$

cu relaţiile:

$$p\cdot b_1=0, \qquad p\cdot b_2=b_1, \qquad \ldots, \qquad p\cdot b_n=b_{n-1}, \qquad \ldots.$$

Considerăm, de asemenea, şi subgrupul K al lui G,

$$K=\langle a_1,a_2+b_1,\ldots,a_n+b_{n-1},\ldots\rangle,$$

cu relaţiile:

$$p\cdot a_1=0, \qquad p\cdot(a_2+b_1)=a_1, \qquad \ldots, \qquad p\cdot(a_n+b_{n-1})=a_{n-1}+b_{n-2}.$$

Aplicaţia:

$$f:T\to K,$$

dată de:

$f(a_1)=a_1$

şi pentru orice $i\geq 2$,

$f(a_i)=a_{i-1}+b_{i-2}$,

este un izomorfism de grupuri, astfel că, K este un sumand direct în G. Din modul de construcţie al lui T şi K deducem că:

$T\cap K=<a_1>$.

Deoarece T este idecompozabil, rezultă că $<a_1>$ nu este sumand direct în T. Rezultă că G are doi sumanzi direcţi a căror intersecţie nu este un sumand direct - contradicţie cu ipoteza. Aşadar, şi a doua afirmaţie din enunţul teoremei este adevărată. □

Teorema 1.1.5: *Fie G un p-grup. Atunci G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă*:

1) *G este idecompozabil*,

sau:

2) *$G=B\oplus C$*,

unde:

- *$pB=0$, $C=0$ sau $C=\mathbf{Z}(p^{\infty})$.*

Demonstraţie: Conform cu (1.1.4), grupurile cu P.I.S.D. au forma prezentată în enunţul teoremei. Vom demonstra că orice grup de această formă are P.I.S.D.; de aceea considerăm un p-grup G ca şi în enunţ şi fie T un sumand direct al lui G. Dacă B_1 este un sumand direct maximal p-mărginit al lui T, atunci:

$T=B_1\oplus C_1$

şi, pentru orice $g\in C_1[p]$, $h_p^G(g)>0$. Dar, pentru orice $g\in G$,

$h_p^G(g)=0$ sau $h_p^G(g)=\infty$.

Deci, pentru orice $g\in C_1[p]$,

$h_p^G(g)=\infty$.

Rezultă că:

$C_1=0$ sau $C_1=\mathbf{Z}(p^{\infty})$,

abstracţie făcând de un izomorfism. Acum, considerăm un alt sumand direct S al lui G,

$S=B_2\oplus C_2$,

unde, B_2 este p-mărginit,

$C_2=0$ sau $C_2=\mathbf{Z}(p^{\infty})$.

Dacă:

$C_1=0$ sau $C_2=0$,

atunci $T\cap S$ este un subgrup p-mărginit al lui G şi este sumand direct. Dacă:

$C_1=C_2=\mathbf{Z}(p^{\infty})$,

atunci:

$T\cap S= B_3\oplus C_3$,

unde B_3 este un sumand direct în B, iar:

$C_3=\mathbf{Z}(p^\infty)$.

Deci,

$B=B_3\oplus B_4$,

iar:

$G=B_3\oplus B_4\oplus \mathbf{Z}(p^\infty)=B_4\oplus(T\cap S)$.

Rezultă că $T\cap S$ este un sumand direct în G şi, astfel, G are P.I.S.D.. □

Grupurile mixte cu P.I.S.D. sunt caracterizate astfel:

Teorema 1.1.6: *Dacă G este un grup mixt cu P.I.S.D., atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *primul subgrup Ulm al părţii de torsiune a lui G este nul, adică*:

$(T(G))^1=0$,

şi,

2) *pentru orice număr prim p, pentru care p-componenta lui G este nenulă, G/T(G) este p-divizibil*. □

Folosind [42, 86.5 şi 86.6,], în [55] se demonstreză:

Teorema 1.1.7: *Orice grup complet decompozabil şi omogen are P.I.S.D.*. □

Considerăm, acum, un grup G fără-torsiune, complet decompozabil şi fie:

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i \qquad (1)$$

o descompunere directă a lui G în subgrupuri (sumanzi direcţi) de rang 1, deci pentru orice $i\in I$,

$r(G_i)=1$.

Observaţia 1.1.8: *Din (1.1.2) rezultă că dacă grupul G este complet decompozabil, descompus conform relaţiei (1) şi are proprietatea că, pentru orice* $i_1, i_2\in I$,

$t(G_{i_1}) \div t(G_{i_2})$,

atunci G are P.I.S.D.. □

Pentru descrierea grupurilor fără-torsiune cu P.I.S.D. sunt necesare următoarele trei rezultate (demonstrate în [55]):

Lema 1.1.9: *Presupunem că în descompunerea (1) există* $i_1, i_2, i_3\in I$ *astfel încât*:

$t(G_{i_1})\geq t(G_{i_2})\neq\tau$ *şi* $t(G_{i_1})\geq t(G_{i_3})\neq\tau$.

Dacă:

$t(G_{i_2}) \div t(G_{i_3})$,

atunci G nu are P.I.S.D.. □

Lema 1.1.10: *Dacă pentru un element oarecare $t_0\in\Gamma$, care nu este maximal, mulţimea $I(t_0)$ este infinită, atunci G nu are P.I.S.D..* □

Lema 1.1.11: *Fie G un grup complet decompozabil, descompus conform relaţiei (1) şi cu următoarele proprietăţi:*

1) *mulţimea Γ are un cel mai mic element t_0, pentru care $I(t_0)$ este finită;*
2) *pentru orice i_1, $i_2\in I\setminus I(t_0)$,*

$$t(G_{i_1}) \div t(G_{i_2}).$$

Atunci G are P.I.S.D.. □

Având aceste rezultate Kamalov demonstrează (în [55, p. 55]) următoarea teoremă de structură a grupurilor fără-torsiune cu P.I.S.D.:

Teorema 1.1.12: *Fie G un grup complet decompozabil, fără-torsiune.*

1) *Dacă G este redus, atunci el are P.I.S.D. dacă şi numai dacă:*

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i, \tag{2}$$

unde:

- *pentru orice $i\in I$, G_i este sau un grup complet decompozabil şi omogen, sau satisface la condiţiile de la (1.1.11)*

şi,

- *pentru orice i_1, $i_2\in I$, sumanzii direcţi de rang 1, din orice descompunere de forma (2), ai lui G_{i_1} şi, respectiv, G_{i_2} au tipuri incomparabile.*

2) *Dacă G nu este redus, el are P.I.S.D. dacă şi numai dacă:*

$$G=B\oplus(\bigoplus_{i\in I} G_i), \tag{3}$$

unde:

- *B este un grup redus, complet decompozabil, omogen, de rang finit,*

şi,

- *pentru orice $i\in I$,*

$$t(G_i)=\tau. \ \square$$

1.2. CARACTERIZĂRI ALE MODULELOR CU P.I.S.D.

Trecem acum la caracterizarea modulelor cu P.I.S.D., module considerate peste diferite inele asociative, cu unitate.

Sunt prezentate aici rezultate referitoare la inelele cu P.I.S.D. (inele considerate ca şi module peste ele însele) şi la modulele injective, peste domenii noetheriene,

cu această proprietate, făcându-se apoi o descriere a modulelor cu P.I.S.D., peste un domeniu noetherian, module care au submodule injective nenule.

Sunt caracterizate, în continuare, modulele de torsiune cu P.I.S.D., peste domenii dedekindiene, caracterizări care vor permite o clasificare a modulelor nereduse cu P.I.S.D., peste domenii cu ideale principale. Dacă R este un inel, pentru un R-modul idecompozabil M, sunt definite şi caracterizate modulele M-proiective cu P.I.S.D., după care se revine la grupurile abeliene fără-torsiune, de rang finit şi la grupurile abeliene complet decompozabile, ca şi cazuri particulare de module. În finalul subcapitolului se prezintă caracterizări ale modulelor cu P.I.S.D., cu ajutorul inelului endomorfismelor lor.

Rezultatele prezentate în Secţiunile 1.2.1, 1.2.2 şi 1.2.3 sunt datorate lui G. G. Wilson şi demonstrate în [97]; cele din Secţiunile 1.2.4, 1.2.5, 1.2.6 şi 1.2.7 sunt datorate lui J. Hausen şi demonstrate în [48]; iar cele din Secțiunea 1.2.8 au fost demonstrate în [13] de D. M. Arnold şi J. Hausen.

1.2.1. Rezultate generale

Peste tot în acest subcapitol vom nota cu R un inel asociativ, cu unitate, modulele le vom considera stângi, peste astfel de inele. Alte condiţii (eventual suplimentare) asupra inelului R, sau R-modulelor, se vor pune ori de câte ori va fi cazul.

Pentru început avem:

Observaţia 1.2.1.1: *Afirmaţiile de la (1.1.1) şi (1.1.2) sunt valabile şi pentru R-module cu P.I.S.D. (C.P.I.S.D.).* □

Pentru a obţine o clasificare a unor inele R, cu ajutorul R-modulelor cu P.I.S.D., avem nevoie de următoarele rezultate:

Propoziţia 1.2.1.2: *R-modulul M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă oricare ar fi T şi S doi sumanzi sumanzi direcţi în M, notând cu:*

$$\pi : M \to S$$

proiecţia canonică a lui M pe S, nucleul restricţiei (lui π la T) $\pi_{/T}$ este un sumand direct în T.

***Demonstraţie*:** Fie T şi S doi sumanzi direcţi în M;

$$M=S\oplus S'=T\oplus T'.$$

Presupunem că M are P.I.S.D.. Dacă:

$$\pi : M \to S$$

este proiecţia canonică a lui M pe S, atunci:

$$\ker(\pi_{|T})=T\cap S'$$

este un sumand direct în T.

Reciproc, dacă:

$\rho : M \to S'$

este proiecţia canonică a lui M pe S', atunci:

$\ker(\rho_{|T})=T\cap S$

este un sumand direct în T şi, astfel, M are P.I.S.D.. □

Propoziţia 1.2.1.3: *Dacă R-modulul M are P.I.S.D., atunci, pentru orice descompunere directă de forma*:

$M=A\oplus B$

şi orice morfism:

$f : A \to B$,

kerf este un sumand direct în A.

***Demonstraţie*:** Fie M un R-modul cu P.I.S.D.,

$M=A\oplus B$

o descompunere directă (oarecare) a lui M şi:

$f : A \to B$

un morfism de R-module. Notăm cu S - submodulul lui M generat de mulţimea $\{x+f(x) \mid x\in A\}$. Aplicaţia:

$g : A \to S$,

dată de legea: pentru orice $x\in A$,

$g(x)=x+f(x)$,

este un izomorfism de R-module. Rezultă că S este un sumand direct în M; de fapt se poate verifica uşor că:

$S+B=S\oplus B=A\oplus B$,

deoarece,

$S\cap B=0$.

Un element a aparţine lui $A\cap S$ dacă şi numai dacă există $b\in A$ astfel încât:

$a=b+f(b)$,

ceea ce este echivalent cu:

$a=b$ şi $f(a)=0$,

adică $a\in\ker f$. Deci, conform ipotezei,

$\ker f=A\cap S$

este un sumand direct în A. □

Acum avem nevoie de următorul concept:

Definiţie: *([66]) Un inel R se numeşte ereditar stâng (drept) dacă orice ideal stâng (drept) al său este proiectiv*.

Redăm în teorema următoare proprietăţile fundamentale (cunoscute) ale inelelor ereditare, proprietăţi pe care le vom folosi în continuare.

Teorema 1.2.1.4: *Fie R un inel. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *R este ereditar*;
2) *([66]) Orice submodul al unui R-modul proiectiv este proiectiv*;
3) *([78]) Orice imagine omomorfică a unui R-modul injectiv este un R-modul injectiv*;
4) *([10]) Orice R-modul factor al unui R-modul injectiv, este un R-modul injectiv*. □

Acum se poate obţine aceea clasificare de care am amintit mai sus, dar mai întâi obţinem o altă condiţie echivalentă cu „*caracterul ereditar*" al unui inel.

Teorema 1.2.1.5: *Pentru un inel R următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Toate R-modulele proiective au P.I.S.D.*;
2) *R este ereditar stâng.*

***Demonstraţie*:** Presupunem că toate R-modulele au P.I.S.D.. Fie M un R-modul proiectiv şi N un submodul al lui M. Din [70, 6.4.14] rezultă că există un R-modul liber F şi un epimorfism:

$$f : F \to N.$$

Conform ipotezei şi lui [70, 6.7.5], $F\oplus N$ are P.I.S.D. şi, aplicând (1.2.1.3), obţinem că kerf este un sumand direct în F; deci,

$$F=\ker f\oplus H.$$

În acest caz:

$$N=\operatorname{Im}f\cong F/\ker f\cong H$$

şi [70, 6.7.7] arată că N este proiectiv. Conform cu (1.2.1.4), R este ereditar stâng.

Reciproc, presupunem că R este ereditar stâng. Fie M un R-modul proiectiv şi considerăm T şi S doi sumanzi direcţi în M. Atunci T şi S sunt R-module proiective; vezi [70, 6.7.4]. Conform lui (1.2.1.4), pentru orice:

$$g : T \to S,$$

Img este un submodul proiectiv al lui S; deci există:

$$h : \operatorname{Im}g \to T$$

astfel încât:

$$h\circ g=i,$$

unde:

$$i : \operatorname{Im}g \to S$$

este aplicaţia de incluziune. Rezultă că şirul:

$$0 \to \ker g \to T \to \operatorname{Im}g \to 0$$

este exact scindabil. Dacă g este restricţia la T a proiecţiei canonice:

$\pi_S : M \to S$,

atunci, conform cu (1.2.1.2), M are P.I.S.D.. □

Următorul rezultat ne redă condiţii echivalente cu „*caracterul semi-simplu*" al unui inel.

Teorema 1.2.1.6: *Pentru un inel R următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *R este semi-simplu*;
2) *Toate R-modulele au C.P.I.S.D.*;
3) *Toate R-modulele au P.I.S.D.*;
4) *Toate R-modulele injective au P.I.S.D.*.

***Demonstraţie*:** Este cât se poate de evident faptul că: **1)** implică **2)** implică **3)** implică **4)**. Presupunem că are loc afirmaţia de la punctul **4)**. Vom demonstra că toate R-modulele sunt injective, de unde va rezulta, conform cu [70, 6.8.18], că R este semi-simplu. Fie M un R-modul oarecare. Conform lui [78, Teorema 2.21], există două R-module injective M_1 şi M_2 şi două monomorfisme:

$\sigma_1 : M \to M_1$ şi $\sigma_2 : M_1/\mathrm{Im}\sigma_1 \to M_2$.

Deoarece $M_1 \oplus M_2$ are P.I.S.D., conform cu (1.2.1.3),

$\ker\sigma_2 = M$

este un sumand direct în M_1. Din [78, Propoziţia 2.3], rezultă că M este injectiv, deci R este semi-simplu. □

Fie R un inel oarecare. Deducem din (1.2.1.5) şi (1.2.1.6) că dacă R nu este ereditar stâng sau nu este semi-simplu, atunci există R-module care nu au P.I.S.D..

În încheierea acestei secţiuni prezentăm două caracterizări ale unor module injective cu P.I.S.D.. În acest sens, presupunem, în continuare, că R este un inel comutativ noetherian. Învelitoarea injectivă a unui R-modul M va fi notată cu E(M).

Lema 1.2.1.7: *Fie R un inel comutativ noetherian şi fie M_1, M_2 două R-module injective idecompozabile. Dacă $M_1 \oplus M_2$ are P.I.S.D., atunci*:

1) *$\mathrm{Hom}(M_1,M_2)=0$*,

sau:

2) *$M_1 \cong M_2$ şi există un ideal prim P, al lui R, astfel încât, pentru orice $x \in M_1 \setminus \{0\}$,*

$P=\mathrm{An}(x)$.

(An(x) notează anulatorul elementului x.)

***Demonstraţie*:** Fie,

$f : M_1 \to M_2$

un morfism nenul de R-module. Conform cu (1.2.1.3), kerf este un sumand direct în M_1. Deoarece M_1 este idecompozabil, rezultă că:

$\ker f=0$.

Pe de altă parte, Imf este un submodul injectiv nenul al lui M_2, iar M_2 este (şi el) idecompozabil. Rezultă că:

$\mathrm{Im} f=M_2$ şi $M_1\cong M_2$.

Fie, acum, $x, y\in M_1\setminus\{0\}$ şi presupunem că există $a\in An(x)$ şi $a\notin An(y)$. Definim funcţia:

$g : M_1 \to M_2$,

prin: pentru orice $m\in M_1$,

$g(m)=f(a\cdot m)$,

unde:

$f : M_1 \to M_2$

este un izomorfism de R-module. Se verifică imediat că g este un morfism de R-module. Atunci:

$g(x)=f(a\cdot x)=f(0)=0$ şi $g(y)=f(a\cdot y)\neq 0$.

Deci g nu este nici nul, nici injectiv. Dar atunci, conform lui (1.2.1.3), $0\neq \ker g$ este un sumand direct în M_1 - ceea ce este imposibil, căci M_1 este idecompozabil. Rezultă că, pentru orice $x, y\in M_1\setminus\{0\}$,

$An(x)=An(y)$;

acesta fiind un ideal al lui R. Acum, pentru un $x\in M_1\setminus\{0\}$, notăm cu:

$P=An(x)$

şi presupunem că $a\cdot b\in P$ şi $a\notin P$. Atunci $a\cdot x\neq 0$ şi $P\subseteq An(a\cdot x)$. Conform celor demonstrate mai sus,

$P=An(a\cdot x)$.

Deoarece:

$b\cdot a\cdot x=0$,

rezultă că $b\in P$ şi, deci P este un ideal prim al inelului R. □

Lema precedentă permite obţinerea unui caz în care reciproca de la (1.1) este adevărată:

Propoziţia 1.2.1.8: *Fie R un inel comutativ noetherian şi M un R-modul injectiv. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *M are P.I.S.D.*;

2) *M are C.P.I.S.D.*.

Demonstraţie**:** Conform lui (1.1) este suficient să demonstrăm, doar, că **2)** implică **1)** Fie:

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

un R-modul injectiv, descompus conform lui [68, Teorema 2.5]; deci, pentru fiecare $i\in I$, M_i este un R-modul injectiv idecompozabil. Introducem pe I următoarea relaţie de echivalenţă, notată cu „≈": pentru orice $i_1, i_2\in I$, prin definiţie:

$i_1\approx i_2$ dacă şi numai dacă $M_{i_1}\cong M_{i_2}$.

Pentru un $i\in I$, notăm cu i^* clasa de echivalenţă a lui i, deci:

$$i^*=\{k\in I \mid M_k\cong M_i\}.$$

Atunci $\{i^*\}_{i\in I}$ este partiţia lui I, corespunzătoare relaţiei „≈", iar:

$$M=\bigoplus_{i^*\in I/\approx} M_{i^*},$$

unde:

$$M_{i^*}=\bigoplus_{k\in i^*} M_k.$$

Pe de altă parte, pentru orice $i_1, i_2\in I$, care nu sunt echivalente,

$$\mathrm{Hom}(M_{i_1^*}, M_{i_2^*})=\mathrm{Hom}(\bigoplus_{k\in i_1^*} M_k, \bigoplus_{l\in i_2^*} M_l)$$

se scufundă izomorf în:

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{k\in i_1^*} M_k, \prod_{l\in i_2^*} M_l)=\prod_{k\in i_1^*}\prod_{l\in i_2^*}\mathrm{Hom}(M_k,M_l)=0.$$

Deci, pentru orice $i_1, i_2\in I$, care nu sunt echivalente, $M_{i_1^*}$ şi $M_{i_2^*}$ sunt total invariante în M. Conform cu (1.1.2) şi (1.2.1.1), este suficient să demonstrăm că, pentru orice $i\in I$, M_{i^*} are C.P.I.S.D.. Dar, pentru orice $i\in I$, M_{i^*} este sau idecompozabil, caz în care are, în mod trivial, această proprietate, sau:

$$M_{i^*}=\bigoplus_{k\in i^*} M_k\cong\oplus_{i^*} E(R/P),$$

deci, M_{i^*} este o sumă directă de R-module injective idecompozabile de forma E(R/P), unde P este un ideal prim al lui R şi, pentru orice $x\in E(R/P)\setminus\{0\}$,

$$An(x)=P,$$

conform lui [68, 2.4 şi 3.1] şi lui (1.2.1.7). În acest ultim caz, se observă că E(R/P) este un modul injectiv fără-torsiune peste domeniul R/P; deci, E(R/P) este izomorf cu corpul fracţiilor lui R/P (vezi [78, p. 50]). Aşadar, pentru orice $i\in I$, M_{i^*} este un spaţiu vectorial peste acest corp şi, astfel, pentru orice $i\in I$, M_{i^*} are C.P.I.S.D.. Acum demonstraţia este completă. □

1.2.2. Module cu sumanzi direcţi injectivi nenuli

În această secţiune se prezintă descrieri ale modulelor cu P.I.S.D., peste un domeniu noetherian, module care au un sumand direct injectiv nenul.

Se ştie că pentru inele noetheriene R, toate R-modulele au un unic sumand direct injectiv maximal dacă şi numai dacă R este ereditar (vezi [68, Propoziţia 1.2 şi Teorema 1.4]). Totuşi, modulele cu P.I.S.D. au un astfel de sumand direct unic, peste orice inel noetherian.

Propoziţia 1.2.2.1: *Fie M un modul peste un inel noetherian R. Dacă M are P.I.S.D., atunci M are un unic sumand direct injectiv maximal.*

***Demonstraţie*:** Fie R şi M ca şi în enunţ. Conform Lemei lui Zorn, putem alege o mulţime $\{M_i\}_{i\in I}$ maximal independentă de submodule injective idecompozabile, ale lui M. Deoarece R este noetherian, R-modulul:

$$E=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

este injectiv, conform cu [78, Teorema 4.1]. Deci E este un sumand direct în M; vezi [78, 2.15]. Vom arăta că E conţine toate submodulele injective ale lui M. Fie N un submodul injectiv, oarecare, al lui M. Deoarece M are P.I.S.D., rezultă că $E\cap N$ este un sumand direct în N; deci,

$$N=(E\cap N)\oplus L.$$

Dacă $L\neq 0$, atunci nici un sumand direct idecompozabil al lui L nu este conţinut în E şi am obţinut, astfel, o mulţime mai mare decât $\{M_i\}_{i\in I}$, de submodule injective, idecompozabile, ale lui M, ceea ce este o contradicţie cu alegerea lui $\{M_i\}_{i\in I}$. □

În continuarea acestei secţiuni vom prezenta caracterizări ale R-modulelor cu P.I.S.D., pentru cazul în care R este un domeniu noetherian cu corpul fracţiilor Λ. Astfel, vom prezenta descrieri ale R-modulelor injective cu P.I.S.D., iar apoi vom vedea când un R-modul cu P.I.S.D. are un submodul injectiv maximal; acest sumand direct va avea un rol fundamental în determinarea acestor R-module cu P.I.S.D..

Propoziţia 1.2.2.2: *Fie R un inel noetherian. Pentru un R-modul injectiv M, următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *M are C.P.I.S.D.*;
2) *M are P.I.S.D.*;
3) ***i)*** *M este fără-torsiune*,

sau:

ii) *M este de torsiune şi, pentru orice doi sumanzi direcţi idecompozabili, T şi S, ai lui M*,

$$Hom(T,S)=0.$$

***Demonstraţie*:** Propoziţia (1.2.1.8) arată că afirmaţiile de la punctele **1)** şi **2)** sunt echivalente. Pentru a arăta că **2)** implică **3)**, vom arăta că M nu este mixt. Pentru orice ideal nenul P, al lui R, $Hom(\Lambda,E(R/P))\neq 0$, căci morfismul compus:

$$R \to R/P \to E(R/P)$$

se poate extinde la un morfism:

$$f : \Lambda \to E(R/P),$$

deoarece Λ este injectiv. Pentru că $kerf\neq 0$, conform cu (1.2.1.1) şi (1.2.1.3), nici un R-modul cu P.I.S.D. nu poate avea un sumand direct izomorf cu $\Lambda\oplus E(R/P)$. Rezultă că M este sau de torsiune, sau fără-torsiune. Presupunem că M este de torsiune şi fie T şi S doi sumanzi direcţi idecompozabili ai lui M. Lema 1.2.1.7 arată că dacă $Hom(T,S)\neq 0$, atunci:

$$T\cong S$$

şi, pentru orice $x, y\in T\setminus\{0\}$,

$$An(x)=An(y).$$

Vom arăta că, în acest caz, există elemente distincte în $T\setminus\{0\}$, care au anulatori diferiţi. Fie $t\in T\setminus\{0\}$ şi $a\in An(t)\setminus\{0\}$. Deoarece T este divizibil (vezi [78, 2.6]), rezultă că există un $u\in T\setminus\{0\}$ astfel încât:

$$a\cdot u=t.$$

Rezultă că $a\notin An(u)$ şi, astfel, $An(u)\neq An(t)$, iar din (1.2.1.7) rezultă că $T\oplus S$ nu poate avea P.I.S.D.. Această contradicţie cu ipoteza arată că:

$$Hom(T,S)=0.$$

Presupunem că au loc afirmaţiile de la punctul **3)**. Dacă M este fără-torsiune, atunci el este un Λ-spaţiu vectorial şi, deci are C.P.I.S.D.. Dacă M este de torsiune, atunci, conform ipotezei şi demonstraţiei lui (1.2.1.8),

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i=\bigoplus_{i^*\in I/\approx} M_{i^*},$$

unde:

$$M_{i^*}=\bigoplus_{k\in i^*} M_k,$$

iar, pentru orice $i\in I$, M_i este injectiv, idecompozabil, şi, pentru orice $i_1, i_2\in I$, care nu sunt echivalente, $M_{i_1^*}$ şi $M_{i_2^*}$ sunt total invariante în M şi au C.P.I.S.D.. Acum (1.1.2) şi (1.2.1.1) completează demonstraţia. □

Următorul rezultat foloseşte conceptul de „*cvasi-isomorfism*”.

Definiţie: *([20]) Fie A şi B două R-module fără-torsiune. Un cvasi-morfism de la A la B este un morfism*:

$$\varphi : E(A) \to E(B)$$

cu proprietatea că există un $r\in R$ astfel încât $r\varphi(E(A))\subseteq B$.

Definiţie: *([20]) Fie A şi B două R-module fără-torsiune. Un cvasi-izomorfism de la A la B este un cvasi-morfism (de la A la B) cu proprietatea că:*

$$\varphi : E(A) \to E(B)$$

este un izomorfism şi:

$$\varphi^{-1} : E(B) \to E(A)$$

este un cvasi-morfism.

Observaţia 1.2.2.3: *Conform cu [20] şi [42, §92], dacă A şi B sunt R-module de rang finit, A este cvasi-izomorf cu B dacă şi numai dacă A este izomorf cu un submodul al lui B şi B este izomorf cu un submodul al lui A, iar dacă A şi B sunt de rang unu şi A este cvasi-izomorf cu B, atunci A este izomorf cu B.* □

Acum, vezi [97, p. 29], se poate demonstra:

Lema 1.2.2.4: *Fie R un domeniu noetherian cu corpul fracţiilor Λ.*

1) *Fie A şi B două R-module fără-torsiune, reduse, de rang unu. Dacă $\Lambda\oplus A\oplus B$ are P.I.S.D., atunci A este cvasi-izomorf cu B.*
2) *Fie $\{A_i\}_{i\in N}$ o familie de R-module fără-torsiune, reduse, de rang unu şi cvasi-izomorfe. Dacă:*

$$A=\bigoplus_{i\in I} A_i,$$

atunci $\Lambda\oplus A$ nu are P.I.S.D.. □

Folosind (1.2.2.4), Wilson demonstrează în [97, p. 30] principalul rezultat al acestei secţiuni:

Teorema 1.2.2.5: *Fie R un domeniu noetherian, M un R-modul cu P.I.S.D. şi E - sumandul direct injectiv maximal, al lui M, cu complementul E',*

$$M=E\oplus E'.$$

1) *Dacă E este de torsiune, atunci M este de torsiune.*
2) *Dacă E este fără-torsiune, atunci submodulul de torsiune T, al lui M, este un sumand direct şi:*

$$M=E\oplus T\oplus U,$$

unde:

- *U este o sumă directă finită de R-module de rang unu, cvasi-izomorfe.* □

Cu anumite restricţii suplimentare asupra domeniului R, putem completa descrierea, dată în (1.2.2.5), R-modulelor cu P.I.S.D., care au un sumand direct injectiv maximal, nenul. Aceasta se va face, însă, în secţiunea următoare, prin descrierea submodulului de torsiune al unui R-modul cu P.I.S.D..

Încheiem acestă secţiune cu un rezultat referitor la R-module fără-torsiune, când R este un domeniu cu ideale principale. În acest caz, R-modulele de rang unu, cvasi-izomorfe, sunt izomorfe; deci sumandul U, din (1.2.2.5), devine un R-modul omogen, complet decompozabil, de rang finit.

Propoziţia 1.2.2.6: *Fie R un domeniu cu ideale principale, E un R-modul injectiv, fără-torsiune şi U un R-modul omogen, complet decompozabil, de rang finit. Atunci*:

$$M=E\oplus U$$

are C.P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Fie $\{S_i\}_{i\in I}$ o familie de sumanzi direcţi ai lui M. Deoarece M este fără-torsiune, submodulul:

$$S=\bigcap_{i\in I} S_i$$

este pur în M; vezi [41, §26]. Dar, S+E este pur în M, ceea ce implică faptul că (S+E)/E este pur în M/E, conform lui [41, 26.1]. Cum:

$$M/E\cong U,$$

rezultă că (S+E)/E este un sumand direct în M/E, conform lui [41, 86.8]. Fie:

$$T=E\cap S.$$

Dacă:

$$T=0,$$

atunci, conform lui [58, Lema 6], S este un sumand direct în M. Dacă $T\neq 0$, atunci T este pur în E, deci T este divizibil şi sumand direct. □

Se impun aici două observaţii:

Observaţia 1.2.2.7: *Desigur că rezultatul de la (1.2.2.6) include şi cazul în care*:

$$E=0.$$

Deci, orice modul omogen, complet decompozabil, de rang finit, peste un domeniu cu ideale principale, are C.P.I.S.D.. □

Observaţia 1.2.2.8: *Există R-module omogene, complet decompozabile, de rang infinit, care au P.I.S.D., fără să aibă C.P.I.S.D.. De exemplu, grupurile abeliene libere, de puterea continuului, au P.I.S.D., dar nu au C.P.I.S.D..* □

Justificarea afirmaţiei de la (1.2.2.8) se va face în secţiunea (2.1.1).

Vom vedea în secţiunea (1.2.4), după ce vom prezenta şi reciproca lui (1.2.1.3), că rezultatul de la (1.2.2.6) se poate generaliza, utilizând un rezultat al lui Botha şi Gräbe ([18]), care consideră clasa $\mathcal{T}$ a tuturor R-modulelor fără-torsiune, de rang finit, al căror inel de endomorfisme este un domeniu cu ideale principale.

1.2.3. Module de torsiune peste domenii dedekindiene

Având determinată partea injectivă a unui R-modul cu P.I.S.D., ne concentrăm atenţia asupra părţii reduse a acestor module, în particular asupra părţii de torsiune a acestora. Peste tot în această secţiune, R va fi un domeniu Dedekind cu corpul fracţiilor Λ. În acest caz, pentru un R-modul de torsiune, avem următorul rezultat important - vezi [97, p. 33]:

Lema 1.2.3.1: *Dacă T este un modul de torsiune peste un domeniu Dedekind R, atunci T admite o descompunere unică, abstracţie făcând de un izomorfism, de forma*:

$T=\oplus T_P$,

unde:

- T_P *este un P-submodul primar, pentru fiecare ideal prim P, al lui R*;
- *submodulul* T_P *este d-divizibil, pentru orice* $d\notin P$. □

Acest rezultat ne permite să dăm o generalizare a lui (1.1.3):

Lema 1.2.3.2: *Fie R un domeniu Dedekind şi*:

$T=\oplus T_P$

un R-modul de torsiune, descompus conform lui (1.2.3.1). Atunci T are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.) dacă şi numai dacă, pentru orice ideal prim P, al lui R, P-componenta T_P *are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.).*

***Demonstraţie*:** Deoarece, pentru orice ideal prim P, P-componenta T_P este un submodul total invariant în T, aplicăm (1.1.2) şi (1.2.1.1). □

Folosind [58, Lema 8], în [97, p. 33] se demonstrează:

Propoziţia 1.2.3.3: *Fie R un domeniu Dedekind şi M un R-modul redus, cu P.I.S.D.. Atunci, pentru fiecare ideal prim P (al lui R), P-componenta de torsiune* M_P *(a lui M) este un sumand direct, care este sau elementar, sau ciclic.* □

Din (1.2.3.3) obţinem:

Corolarul 1.2.3.4: *Dacă R şi M satisfac la (1.2.3.3), atunci, pentru fiecare ideal prim P (al lui R), P-componenta de torsiune* M_P *(a lui M) are C.P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** În acest caz, M_P este un spaţiu vectorial peste corpul R/P. □

Se impun aici două observaţii:

Observaţia 1.2.3.5: *În general, într-un R-modul cu P.I.S.D., partea de torsiune a acestuia nu este, neaparat, un sumand direct, vezi secţiunea (2.1.5).* □

Observaţia 1.2.3.6: *Conform cu [78, 2.15] şi (1.2.3.3), orice R-modul M cu P.I.S.D., se poate scrie sub forma*:

$M=E\oplus C_P\oplus X_P$,

unde:

- *E este divizibil*,
- *C_P este P-primar redus*

şi,

- *X_P este un complement redus al lui C_P*,

iar,

- *P este un ideal prim (oarecare) al lui R*. □

Utilizând descompunerea, dată în (1.2.3.6), a unui R-modul M, în [97] se demonstrează:

Teorema 1.2.3.7: *Fie R un domeniu Dedekind, E - un R-modul divizibil şi C_P un R-modul P-primar redus, unde P este un ideal prim al lui R. Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *$E\oplus C_P$ are C.P.I.S.D.*;

2) *$E\oplus C_P$ are P.I.S.D.*;

3) ***i)*** *E şi C_P au fiecare P.I.S.D.*

şi,

ii) *dacă E(R/P) este un sumand direct în E, atunci C_P este elementar*. □

Corolarul 1.2.3.8: *Dacă R-modulul M are P.I.S.D., atunci T(M) - submodulul său de torsiune are C.P.I.S.D.*.

***Demonstraţie*:** Enunţul rezultă din (1.2.3.1), (1.2.3.2), (1.2.3.6) şi (1.2.3.7). □

Acum, pentru R-module de torsiune are loc reciproca lui (1.2.3.3).

Corolarul 1.2.3.9: *Fie*,

$M=\oplus M_P$

un R-modul de torsiune, descompus conform lui (1.2.3.1). Atunci:

M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă fiecare P-componentă primară M_P este un R-modul elementar sau ciclic.

***Demonstraţie*:** Enunţul rezultă din (1.2.3.1), (1.2.3.3) şi (1.2.3.7). □

Fie M un R-modul cu P.I.S.D.. Teorema 1.2.2.5 arată că dacă R este domeniu noetherian, iar E - submodulul injectiv al R-modulului:

$M=E\oplus C$

este de torsiune, atunci M este de torsiune. Torsiunea părţii reduse va conduce la alte rezultate, impunând anumite condiţii asupra lui C.

Propoziţia 1.2.3.10: *Fie R un domeniu Dedekind şi*:

$C=C_P\oplus X_P$

- sumandul direct redus al unui R-modul M, descompus conform lui (1.2.3.6). Atunci C are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.) dacă şi numai dacă:

1) *C_P şi X_P au fiecare P.I.S.D. (C.P.I.S.D.)*,

şi,

2) dacă $C_P\neq0$, atunci X_P este P-divizibil.

***Demonstraţie*:** Presupunem că C are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.). Atunci, din (1.1.1) şi (1.2.1.1), rezultă că C_P şi X_P au fiecare P.I.S.D. (C.P.I.S.D.). Presupunem, acum, că $C_P\neq0$ şi X_P nu este P-divizibil. Deoarece C_P este o p-componentă primară a lui M, există un $y\in C_P$ cu:

$yP=0$.

Atunci:

$\langle y\rangle\cong R/P$, $X_P\neq PX_P$

şi, deci există o aplicaţie nenulă:

$f : X_P\rightarrow \langle y\rangle$.

În acest caz, kerf nu poate fi sumand direct în X_P, căci atunci:

$X_P\cong \ker f\oplus \mathrm{Im} f$,

care este de P-torsiune. Deci $C_P\neq0$ implică faptul că X_P este P-divizibil.

Reciproc, dacă afirmaţia **2)** are loc, atunci C_P şi X_P sunt total invariante. Acum, afirmaţia **1)** împreună cu (1.1.2) şi (1.2.1.1) completează demonstraţia propoziţiei. □

Corolarul 1.2.3.11: *Fie R un domeniu cu ideale principale şi fie M un R-modul cu P.I.S.D.. Dacă M are un submodul divizibil nenul, atunci M are C.P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Dacă M este de torsiune, enunţul rezultă din (1.2.3.7). Dacă submodulul divizibil E, al lui M, este fără-torsiune, atunci, conform lui (1.2.2.5),

$M=E\oplus T\oplus U$,

unde:

- $T=T(M)$,

iar,

- U este un R-modul omogen, complet decompozabil, de rang finit.

Conform cu (1.2.2.6) şi (1.2.3.7), $E\oplus U$ şi T au C.P.I.S.D.. Deoarece T este total invariant în M, iar din (1.2.3.10) rezultă că şi $E\oplus U$ este total invariant (în M), enunţul rezultă din (1.1.2) şi (1.2.1.1). □

1.2.4. Module M-proiective

În această secţiune vom nota cu R un inel asociativ, cu unitate, iar modulele considerate vor fi stângi, peste astfel de inele. Orice condiţie suplimentară asupra inelului R sau R-modulelor se va pune ori de câte ori va fi cazul.

La începutul acestei secţiuni vom prezenta reciproca lui (1.2.1.3). Această reciprocă va avea mai multe consecinţe şi o vom exploata pentru a caracteriza R-

modulele idecompozabile M, cu proprietatea că, pentru orice mulţime de indici I (finită sau infinită), R-modulul:

$M^*=\oplus_I M$

are P.I.S.D.. În acest sens vom folosi o echivalenţă categorială dată de U. Albrecht în [2], D. M. Arnold, E. L. Lady şi C. Murley în [14] şi, respectiv [15].

Propoziţia 1.2.4.1: *R-modulul M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă, pentru orice descompunere directă de forma*:

$M=A\oplus B$

şi orice morfism de R-module:

$f: A \to B$,

kerf este un sumand direct în A.

***Demonstraţie*:** Conform cu (1.2.1.3), trebuie să demonstrăm doar suficienţa. Fie:

$M=S\oplus S'=T\oplus T'$

două descompuneri directe (oarecari) ale lui M şi:

$\pi_{S'} : M \to S'$, respectiv $\pi_T : M \to T$,

proiecţiile canonice corespunzătoare lui S′, respectiv T. Definim aplicaţia:

$f=((\pi_{S'} \circ(\pi_T-1))_{|S}$.

Atunci:

$f : S \to S'$

este un morfism de R-module, al cărui nucleu, conform ipotezei, este un sumand direct în S. Se verifică imediat că:

$kerf=(S\cap T)\oplus(S\cap T')$.

Aşadar M are P.I.S.D.. □

R-modulele proiective cu P.I.S.D. caracterizează o altă clasă de inele.

Definiţie: *([66]) Un inel R se numeşte semi-ereditar stâng (drept) dacă orice ideal stâng (drept) finit generat, al lui R, este proiectiv*.

Observaţia 1.2.4.2: *Teorema 1.2.1.4 are loc şi pentru inele semi-ereditare, considerând module proiective finit generate.* □

Deci, tinând cont de (1.2.1.5), (1.2.4.1) şi (1.2.4.2), obţinem:

Teorema 1.2.4.3: *Pentru un inel R, următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Toate R-modulele proiective finit generate au P.I.S.D.*;

2) *R este semi-ereditar stâng.* □

O altă consecinţă a lui (1.2.4.1) este:

Corolarul 1.2.4.4: *Fie M un R-modul idecompozabil. Dacă M⊕M are P.I.S.D., atunci orice endomorfism nenul, al lui M, este monomorfism.*

Demonstraţie: Conform ipotezei şi lui (1.2.4.1), pentru orice endomorfism f, al lui M, kerf este un sumand direct în M şi, deoarece M este idecompozabil, rezultă că:

(kerf=0, caz în care f este injectiv) sau (kerf=M, caz în care f=0). □

Aşa cum am precizat în Secţiunea 1.2.2, rezultatul de la (1.2.2.6) se poate generaliza, utilizând un rezultat al lui Botha şi Gräbe ([18]), care consideră clasa $\mathfrak{C}$ a tuturor R-modulelor fără-torsiune, de rang finit, care au inelul endomorfismelor un domeniu cu ideale principale. Ei au arătat (în [18]) că această clasă conţine toate R-modulele fără-torsiune, de rang unu. Rezultatul lor, care ne interesează pe noi, este conţinut în următoarea lemă:

Lema 1.2.4.5: *Fie M o sumă directă finită de exemplare de $A \in$C. Atunci nucleul oricărui endomorfism al lui M este un sumand direct în M, care este izomorf cu o sumă directă de exemplare de A.* □

Acum obţinem generalizarea amintită mai sus:

Corolarul 1.2.4.6: *Dacă M satisface la (1.2.4.5), atunci M are C.P.I.S.D..*

Demonstraţie: Din (1.2.4.1) rezultă că M are P.I.S.D.. Deoarece M este de rang finit, rezultă că el are C.P.I.S.D.. □

Următoarele rezultate utilizează conceptul de R-modul „*auto-mic*”:

Definiţie: *([15]) Un R-modul M se numeşte auto-mic dacă Hom(M,-) conservă orice sumă directă de exemplare de M; adică, pentru orice mulţime de indici I, R-modulele Hom(M,$\oplus_I$M) şi $\oplus_I$Hom(M,M) sunt natural izomorfe.*

Ne sunt utile următoarele rezultate:

Teorema 1.2.4.7: 1) *([11]) Fie M un R-modul fără-torsiune, de rang finit. Dacă pentru orice morfism*:

$f : M \to \oplus_I M$,

Imf este conţinută într-o sumă directă finită de exemplare de M, atunci M este auto-mic.

2) *([15]) Dacă orice endomorfism nenul al R-modulului M este injectiv, atunci M este auto-mic.* □

Acum, din (1.2.4.4) şi (1.2.4.7), obţinem:

Corolarul 1.2.4.8: *Dacă M este un R-modul idecompozabil astfel încât M⊕M are P.I.S.D., atunci M este auto-mic.* □

Prezentăm, acum, următorul concept:

Definiţie: *([48]) Fie M şi N două R-module. Spunem că N este (finit) M-proiectiv, dacă N este un sumand direct al unei sume directe (finite) de exemplare de M.*

În continuare folosim următoarele notaţii:

- *Mod_R*, pentru categoria R-modulelor,
- *P(M)*, pentru categoria R-modulelor finit M-proiective,

- $P^{\infty}(M)$, pentru categoria R-modulelor M-proiective,
- *E*, pentru inelul End(M) al tuturor endomorfismelor R-modulului M,
- Mod_E, pentru categoria E-modulelor,
- *P(E)*, pentru categoria E-modulelor finit generate şi proiective,
- $P^{\infty}(E)$, pentru categoria E-modulelor proiective.

Considerăm M, N, $S \in Mod_R$ şi notăm cu:

$H_M(N)=Hom_R(M,N)$.

Atunci $H_M(N) \in Mod_R$ şi, pentru orice $f \in Hom_R(N,S)$, putem defini:

$H_M(f) : H_M(N) \to H_M(S)$,

prin: pentru orice $g \in H_M(N)$,

$H_M(f)(g)=f \circ g$.

Deci:

$H_M : Mod_R \to Mod_E$

este un functor categorial exact, stâng. Analog, dacă A, $B \in Mod_E$, definim:

$T_M(A)=A \otimes_E M$.

Dacă $M \in {}_E Mod_R$, este un bimodul, atunci $T_M(A) \in Mod_R$, şi dacă $\alpha \in Hom_E(A,B)$, atunci putem defini:

$T_M(\alpha) : T_M(A) \to T_M(B)$,

prin: pentru orice $a \in A$ şi orice $m \in M$,

$T_M(\alpha)(a \otimes m)=\alpha(a) \otimes m$.

Deci:

$T_M=- \otimes_E M$

este un functor categorial exact, drept.

Teorema care urmează a fost demonstrată prima dată de U. Albrecht în [2]; au urmat apoi D. M. Arnold şi E. L. Lady în [14], şi D. M. Arnold şi C. Murley în [15]. J. Hausen a extins-o în [48], în mod natural, la R-module.

Teorema 1.2.4.9: *Dacă $M \in Mod_R$ atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Aplicaţia*:

$$H_M : P(M) \to P(E)$$

este o echivalenţă categorială a cărei inversă este:

$$T_M : P(E) \to P(M).$$

2) *Dacă M este auto-mic, atunci*:

$$H_M : P^{\infty}(M) \to P^{\infty}(E)$$

este o echivalenţă categorială a cărei inversă este:

$$T_M : P^{\infty}(E) \to P^{\infty}(M).$$ □

În caracterizările sumelor directe de module idecompozabile cu P.I.S.D. folosim următoarele noţiuni:

Definiţie: *([48]) Fie M, N∈Mod$_R$. Numim M-soclul lui N mulţimea*:

$S_M(N)=\sum\{f(M) \mid f\in H_M(N)\}$.

Observaţia 1.2.4.10: *Dacă N este imaginea unui modul M-proiectiv, atunci*:

$N=S_M(N)$. □

Definiţie: *([48]) Fie M, N∈Mod$_R$. Spunem că N este finit M-generat dacă există $f_1, \ldots f_n\in H_M(N)$ astfel încât*:

$$N=\sum_{i=1}^{n} f_i(M).$$

Observaţia 1.2.4.11: *Dacă M, N∈Mod$_R$, atunci N este finit M-generat dacă şi numai dacă există un S∈P(M) şi un epimorfism*:

$f: S \to N$. □

Pentru un R-modul M, în [14], se studiază următoarele condiţii:

(I) *Dacă $U\leq T\in P^{\infty}(M)$ şi*:

$U=S_M(U)$,

atunci $U\in P^{\infty}(M)$.

(II) *Şirul exact*:

$0 \to K \to G \to P \to 0$

de R-module, cu $P\in P^{\infty}(M)$ şi:

$G=K+S_M(G)$,

este scindabil.

În [48] aceste condiţii se modifică astfel:

(I*) *Dacă $U\leq T\in P(M)$ şi*:

$U=S_M(U)$,

atunci $U\in P(M)$.

(II*) *Şirul exact*:

$0 \to K \to G \to P \to 0$

de R-module, cu $P\in P(M)$ şi:

$G=K+S_M(G)$,

unde $S_M(G)$ este finit M-generat, este scindabil.

Folosind aceste condiţii, Hausen demonstrează în [48] următoarele teoreme de caracterizare a unor sume directe de R-module cu P.I.S.D.:

Teorema 1.2.4.12: *Dacă M este un R-modul idecompozabil, următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Pentru orice mulţime de indici I, R-modulul*:

$$M^*=\oplus_I M$$

are P.I.S.D.;

2) *Dacă S şi T sunt M-proiective şi*:

$$f: S \to T$$

este un morfism de R-module, atunci kerf este un sumand direct în S;

3) *Pentru orice R-modul M-proiectiv N şi orice g - endomorfism al lui N, kerg este un sumand direct în N*;

4) *Condiţiile (I) şi (II) au loc*;

5) *Inelul*:

$$E=End(M)$$

este ereditar (drept), M este un E-modul (stâng) plat şi M este auto-mic. □

Teorema 1.2.4.13: *Dacă M este un R-modul idecompozabil, următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Pentru orice mulţime finită de indici I, R-modulul*:

$$M^*=\oplus_I M$$

are P.I.S.D.;

2) *Dacă S şi T sunt finit M-proiective şi*:

$$f: S \to T$$

este un morfism de R-module, atunci kerf este un sumand direct în S;

3) *Pentru orice R-modul finit M-proiectiv N şi orice g - endomorfism al lui N, kerg este un sumand direct în N*;

4) *Condiţiile (I*) şi (II*) au loc*;

5) *Inelul*:

$$E=End(M)$$

este semi-ereditar (drept) şi M este un E-modul (stâng) plat. □

Se observă că (1.2.4.12) şi (1.2.4.13) exprimă condiţii echivalente pentru existenţa unor soluţii la cea de-a doua problemă a lui Fuchs.

1.2.5. Module peste domenii cu ideale principale

În această secţiune vom prezenta câteva aplicaţii, a ceea ce s-a prezentat în secţiunea anterioară, la module cu P.I.S.D., module considerate peste diferite domenii cu ideale principale. Pentru început prezentăm următoarea lemă:

Lema 1.2.5.1: *Fie M un R-modul fără-torsiune cu proprietatea că inelul*:

$$E=End(M)$$

este un domeniu cu ideale principale. Atunci M este un R-modul idecompozabil, auto-mic şi E-plat.

***Demonstraţie*:** Dacă E este domeniu cu ideale principale, atunci E este noetherian, conform cu [69, 4.10.19]. Din [68, 2.4], rezultă că există un ideal P al lui E astfel încât:

$M \cong E/P$.

Dacă M este un E-modul de torsiune, atunci există $\alpha \in E$, $\alpha \neq 0$, astfel încât $\alpha(E) \subseteq P$ şi:

$\alpha(M)=0$,

ceea ce este imposibil. Deci M nu este de torsiune şi nici nu poate avea submodul de torsiune, peste E. Rezultă că M este un E-modul fără-torsiune. Aşadar, dacă $\phi \in E$, $m \in M \setminus \{0\}$ şi:

$\phi(m)=0$,

atunci:

$\phi=0$.

Rezultă că orice endomorfism al lui M este injectiv şi, conform lui (1.2.4.7)2), rezultă că M este auto-mic. Acum, presupunem că:

$M=A \oplus B$.

Atunci:

$B=\ker\pi_A$,

unde π_A este proiecţia canonică a lui M pe A. Din cele demonstrate mai sus rezultă că:

$B=0$ şi M este idecompozabil.

Faptul că M este E-plat rezultă din [70, 6.13.15], pentru că M este un E-modul fără-torsiune. □

Acum rezultatele din (1.2.4.5) şi, respectiv (1.2.4.6) se pot generaliza:

Propoziţia 1.2.5.2: *Fie M un R-modul fără-torsiune cu proprietatea că inelul*:

$E=End(M)$

este un domeniu cu ideale principale, I este o mulţime oarecare de indici şi:

$M^* = \oplus_I M$.

Atunci au loc următoarele afirmaţii:

1) *M^* are P.I.S.D.*;
2) *Nucleul oricărui endomorfism al lui M^* este un sumand direct în M^*, care este (şi el) o sumă directă de exemplare de M.*

***Demonstraţie*:** Din (1.2.5.1) rezultă că M este idecompozabil, auto-mic şi E-plat. Din demonstraţia lui (1.2.5.1) rezultă că E nu are divizori ai lui 0. Atunci, conform lui [70, 6.4.22 şi 6.7.8a)], E este un inel ereditar. Deci, putem aplica (1.2.4.13) şi

obţinem că M^* are P.I.S.D. şi nucleul oricărui endomorfism al lui M^* este un sumand direct în M^*. Aşa cum am mai precizat mai sus, deoarece E este un domeniu cu ideale principale, rezultă că modulele E-proiective sunt libere. Prin dualizare (vezi [14]) obţinem că modulele M-proiective sunt M-libere, adică sunt o sumă directă de exemplare de M. Acum demonstraţia este completă. □

Trebuie să remarcăm că:

Observaţia 1.2.5.3: *Dacă în (1.2.5.2) mulţimea de indici I este finită, atunci M^* are C.P.I.S.D., dar dacă I este infinită, atunci M^* s-ar putea să aibă numai P.I.S.D., conform cu (1.2.2.8).* □

Din (1.2.1.1), (1.2.2.5) şi (1.2.2.6) se obţine:

Teorema 1.2.5.4: *Fie R un domeniu cu ideale principale şi*:

$M=D\oplus H$

un R-modul fără-torsiune, unde D este divizibil şi H este redus. Atunci M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă:

1) *H are P.I.S.D.*

şi,

2) *dacă $D\neq 0$, atunci H este complet decompozabil, omogen, de rang finit.* □

Deci, determinarea R-modulelor fără-torsiune cu P.I.S.D., peste domenii cu ideale principale, se reduce la determinarea R-modulelor reduse cu această proprietate.

Încheiem această secţiune cu o aplicaţie a lui (1.2.5.2).

Propoziţia 1.2.5.5: *Fie R un domeniu cu ideale principale şi M un R-modul fără-torsiune, de rang unu. Atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Inelul*:

$E=End(M)$

este un domeniu cu ideale principale;

2) *Pentru orice mulţime de indici I, R-modulul*:

$M^*=\oplus_I M$

are P.I.S.D.;

3) *Nucleul oricărui endomorfism al lui M^* este un sumand direct în M^*, care este (şi el) o sumă directă de exemplare de M.*

***Demonstraţie*:** Fie,

$S=\{r\in R \mid rM=M\}$.

Atunci, conform cu [51, p. 148], inelul de fracţii $S^{-1}R$ este un domeniu cu ideale principale şi E este izomorf cu acest inel, $S^{-1}R$. Acum (1.2.5.2) completează demonstraţia. □

1.2.6. Grupuri abeliene de rang finit

Fie G un grup abelian idecompozabil. Atunci, conform cu [41, 27.4], G este sau fără-torsiune, sau cociclic. Dacă G este subgrup al lui $\mathbf{Z}(p^{\infty})$ şi $G\oplus G$ are P.I.S.D., atunci, conform cu (1.2.4.1),

$G\cong\mathbf{Z}(p)$.

Deci, în acest caz, G este un spaţiu vectorial şi, pentru orice mulţime de indici I, grupul:

$G^{*}=\oplus_{I}G$

are C.P.I.S.D.. Rezultă că pentru grupurile abeliene, Teoremele 1.2.4.12 şi 1.2.4.13 sunt interesante numai atunci când G este fără-torsiune.

Dar, în cazul grupurilor abeliene fără-torsiune, de rang finit, rezultatele de la (1.2.4.12) şi (1.2.4.13) pot fi combinate – vezi Teorema 1.2.6.2. Pentru aceasta, însă, este nevoie de următorul rezultat al lui Huber şi Warfield, demonstrat în [50]:

Teorema 1.2.6.1: *Dacă G este un grup abelian fără-torsiune, de rang finit, astfel încât inelul*:

$E=End(G)$

este semi-ereditar (stâng sau drept), atunci E este ereditar (stâng şi drept). □

Teorema 1.2.6.2: *Fie G un grup abelian idecompozabil, fără-torsiune, de rang finit. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Pentru orice mulţime de indici I, grupul*:

   $G^{*}=\oplus_{I}G$

   are P.I.S.D.;

2) *Pentru orice mulţime finită de indici I, grupul*:

   $G^{*}=\oplus_{I}G$

   are P.I.S.D.;

3) *Inelul endomorfismelor lui G este semi-ereditar drept*.

***Demonstraţie*:** Desigur că **1)** implică **2)**. Din (1.2.4.13), rezultă că **2)** implică **3)**. Conform cu (1.2.6.1),

$E=End(G)$

este un inel ereditar. Acum [14, Teorema 1(d)] arată că condiţiile (I) şi (II) au loc. Aplicând (1.2.4.12), obţinem afirmaţia de la punctul **1)**. □

Fie G un grup abelian fără-torsiune, de rang finit. Atunci:

$G=G_1\oplus\ldots\oplus G_n$,

unde, pentru orice i=1, 2, …, n, G_i este idecompozabil.

Aşa cum am văzut în (1.1.2), G poate avea P.I.S.D., fără ca printre aceşti G_i să existe doi care să fie izomorfi, dar, în acest caz, fiecare G_i este total invariant în G. Caracterizarea grupurilor fără-torsiune, de rang finit, cu P.I.S.D., care nu au sumanzi direcţi total invarianţi proprii, utilizează următoarele rezultate ale lui D. M. Arnold, demonstrate în [11].

Notăm cu QE(G) - inelul cvasi-endomorfismelor grupului G.

Propoziţia 1.2.6.3: *Fie G un grup abelian fără-torsiune, de rang finit şi*:

$E=End(G)$

- inelul endomorfismelor sale. Atunci au loc următoarele afirmaţii:

1) *Dacă $f\in E$ este monomorfism, atunci $G/f(G)$ este finit*;
2) *Un endomorfism nenul $g\in E$ este monomorfism dacă şi numai dacă g nu este un divizor al lui zero în E*;
3) *Orice endomorfism nenul $h\in E$ este monomorfism dacă şi numai dacă QE(G) este o algebră cu diviziune*. □

Propoziţia 1.2.6.4: *Fie G şi H două grupuri abeliene fără-torsiune, de rang finit. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *G este cvasi-izomorf cu H*;
2) *Există un monomorfism*:

   $f : G \to H$

   astfel încât $H/f(G)$ este finit;
3) *Există $0\neq n\in\mathbf{Z}$ şi morfismele*:

   $f : G \to H$ *şi* $g : H \to G$

   astfel încât:

   $g\circ f=n\cdot 1_G$ *şi* $f\circ g=n\cdot 1_H$;
4) *Există monomorfismele*:

   $f : G \to H$ *şi* $g : H \to G$. □

Prezentăm acum, caracterizarea de care am amintit mai înainte (vezi [48]).

Teorema 1.2.6.5: *Fie G un grup abelian fără-torsiune, de rang finit şi fără sumanzi direcţi total invarianţi proprii*:

$G=G_1\oplus...\oplus G_n$,

unde, pentru orice i=1, 2, …, n, G_i este idecompozabil. Dacă G are P.I.S.D., atunci G este idecompozabil, sau mulţimea $\{G_1,...,G_n\}$ este formată din perechi de grupuri cvasi-izomorfe şi, pentru orice i=1, 2, …, n, inelul $QE(G_i)$ este o algebră cu diviziune.

***Demonstraţie*:** Presupunem că G este decompozabil, dar nu în sumă directă de grupuri idecompozabile cvasi-izomorfe. Deci presupunem că:

$G=G_1\oplus…\oplus G_n$,

unde, pentru orice $i=1, 2, \ldots, n$, G_i este idecompozabil, neexistând i şi j ($i\neq j$) în mulţimea $\{1,2,\ldots,n\}$ astfel încât G_i să fie cvasi-izomorf cu G_j. Deoarece G nu are sumanzi direcţi total invarianţi proprii, pentru fiecare $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, există $j\in\{1, 2,\ldots, n\}$, $i\neq j$, astfel încât $Hom(G_i,G_j)\neq 0$ şi, conform cu (1.2.4.1), G_i este izomorf cu un subgrup al lui G_j. Datorită faptului că familia $\{G_i\}$ este finită, pentru fiecare $j\in\{1,2,\ldots,n\}$, există $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, $j\neq k$, astfel încât monomorfismul compus:

$$G_k \to G_j \to G_k$$

este nenul. Acum, din (1.2.6.4), obţinem că G_k este cvasi-izomorf cu G_j, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că mulţimea $\{G_1,\ldots,G_n\}$ este formată din perechi de grupuri cvasi-izomorfe. Acum (1.2.4.1) şi (1.2.6.3) completează demonstraţia. □

Două observaţii se impun aici:

Observaţia 1.2.6.6: *Grupurile $\{G_1,\ldots,G_n\}$ din (1.2.6.5) nu trebuie, neaparat, să fie izomorfe. De fapt, din (1.2.4.1) şi [42, 92.3 şi 92.5], rezultă că, pentru orice grup G, fără-torsiune, de rang finit, care are proprietatea că QE(G) este o algebră cu diviziune şi orice grup G', care este cvasi-izomorf cu G, grupul*:

$$G''=G\oplus G'$$

are proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi. □

Observaţia 1.2.6.7: *Reciproca lui (1.2.6.5) este falsă, adică: dacă*,

$$G=G_1\oplus\ldots\oplus G_n,$$

unde:

- *pentru orice $i=1, 2, \ldots, n$, G_i este idecompozabil*;
- *mulţimea $\{G_1,\ldots,G_n\}$ este formată din perechi de grupuri cvasi-izomorfe*

şi,

- *pentru orice $i=1, 2, \ldots, n$, inelul $QE(G_i)$ este o algebră cu diviziune, atunci nu rezultă că G are P.I.S.D. (vezi exemplul lui C. I. Vinsonhaler prezentat în [48]).* □

1.2.7. Grupuri complet decompozabile

În această secţiune, pornind de la ceea ce am prezentat în acest Subcapitol 1.2, dar şi de la unele rezultate ale lui Arnold ([11]), Fuchs ([41] şi [42]), Bowman şi Rangaswamy ([19]), vom prezenta alt mod de a obţine un rezultat asemănător lui (1.1.12), referitor la această clasă de grupuri cu P.I.S.D., şi datorat lui Hausen (vezi [48]).

Toate grupurile considerate aici sunt fără-torsiune. Conform cu (1.2.5.4), ne putem rezuma la grupuri reduse. Şi aici, ca şi în (1.1), t(G) va fi tipul grupului G.

Primul rezultat va fi o reciprocă a lui (1.1.9). Pentru aceasta, însă, avem nevoie de următoarele două rezultate tehnice – vezi [11, p. 7]:

Propoziţia 1.2.7.1: *Fie G şi H două grupuri fără-torsiune, de rang unu. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) $Hom(G,H)\neq 0$;

2) *Există un monomorfism*:

$$f : G \to H;$$

3) $t(G)\leq t(H)$.

***Demonstraţie*:** Presupunem că **1)** are loc. Deoarece G şi H sunt fără-torsiune şi de rang unu, conform cu (1.2.5.5) şi (1.2.5.1), orice morfism:

$$f : G \to H$$

este monomorfism. Rezultă că are loc afirmaţia de la punctul **2)**.

Dacă are loc afirmaţia **2)** şi:

$$f : G \to H$$

este un monomorfism, atunci, conform cu [42, §85, p. 109], avem că $t(G)\leq t(H)$; deci are loc afirmaţia de la **3)**.

Dacă are loc afirmaţia de la punctul **3)**, atunci, pentru fiecare $0\neq g\in G$, alegem un $0\neq h\in H$ astfel încât $\chi_G(g)\leq\chi_H(h)$ şi definim:

$$f : G \to H,$$

prin:

$$f(g)=h.$$

Rezultă că $Hom(G,H)\neq 0$. □

Corolarul 1.2.7.2: *Fie G şi H două grupuri fără-torsiune, de rang unu. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *G este izomorf cu H*;

2) $Hom(G,H)\neq 0$ *şi* $Hom(H,G)\neq 0$;

3) *Există un monomorfism*:

$$f : G \to H$$

astfel încât H/f(G) este finit.

***Demonstraţie*:** Desigur că, dacă are loc **1)**, atunci are loc şi **3)**.

Dacă are loc **3)**, atunci există $0\neq n\in N$ astfel încât $nH\leq f(G)\leq H$. În aceste condiţii, aplicaţia:

$$ng : H \to G,$$

unde:

$$g : H \to G$$

este o inversă la stânga a lui f, este un morfism de grupuri. Deci are loc afirmaţia de la punctul **2)**.

Acum, presupunem că are loc **2)**. Conform cu (1.2.7.1), avem că:

$t(G)=t(H)$

şi [42, 85.1] arată că are loc **1)**. □

Utilizând rezultatele de mai sus, Hausen redescoperă (1.1.9), dar altfel:

Lema 1.2.7.3: *Fie G, H şi K grupuri fără-torsiune, reduse, de rang unu, astfel încât $t(G)\trianglelefteq t(K)$ şi $t(H)\trianglelefteq t(K)$. Dacă $G\oplus H\oplus K$ are P.I.S.D., atunci G este izomorf cu H.*

Demonstraţie**:** Conform cu (1.2.7.2), este suficient să demonstrăm că:

$Hom(G,H)\neq 0$ şi $Hom(H,G)\neq 0$.

Pentru început să considerăm două morfisme nenule:

$\alpha : G \to K$ şi $\beta : H \to K$.

Deoarece K este redus, există un număr natural $n\neq 0$ astfel încât $\beta(H)\not\subset n\alpha(G)$. Fie:

$\gamma : G\oplus H \to K$,

definită prin: pentru orice $(g,h)\in G\oplus H$,

$\gamma((g,h))=n\cdot\alpha(g)+\beta(h)$.

Dacă $G\oplus H\oplus K$ are P.I.S.D., atunci, conform cu (1.2.1.3),

$G\oplus H=\ker\gamma\oplus X$,

unde X este un grup de rang unu. Dacă:

$\pi_H : G\oplus H \to H$ şi $\pi_X : G\oplus H \to X$

sunt proiecţiile canonice ale lui $G\oplus H$ pe sumanzii H, respectiv X, atunci $G\not\subset\ker\gamma$, căci H este fără-torsiune, şi, deci, $\pi_X(G)\neq 0$. Presupunem că:

$\pi_H(X)=0$.

Atunci:

$X\subseteq G$ şi $\beta(H)=\gamma(H)\subseteq\gamma(X)\subseteq\gamma(G)=n\alpha(G)$,

ceea ce este în contradicţie cu alegerea lui n. Rezultă că $\pi_H(X)\neq 0$. Dacă există $0\neq Y\leq X$ astfel încât:

$\pi_H(Y)=0$,

atunci $Y\leq G\cap X$ - care este un sumand direct nenul al lui X; aceasta este o contradicţie cu faptul că X este idecompozabil. Deci $\pi_{B|_X}$ este monomorfism şi, astfel, $(\pi_H\circ\pi_X\circ\pi_G)(G)\neq 0$. Aşadar, $Hom(G,H)\neq 0$. Analog se demonstrează că şi $Hom(H,G)\neq 0$. Acum (1.2.7.2) completează demonstraţia. □

Următorul rezultat arată că, în anumite condiţii, o inegalitate strictă între tipurile a doi sumanzi direcţi complementari ai unui grup cu P.I.S.D., poate implica, caracterul finit al rangului unuia din ei.

Propoziţia 1.2.7.4: *Fie G un grup fără-torsiune, omogen, complet decompozabil şi H un grup fără-torsiune, redus, de rang unu. Dacă t(H)>t(G) şi G⊕H are P.I.S.D., atunci G este de rang finit.*

***Demonstraţie*:** Conform cu [42, §85, p. 108], putem considera că H este un subgrup al lui **Q** cu $1\in H$ şi există X - un subgrup al lui H astfel încât:

$1\in X$ şi $t(X)=t(G)$.

Presupunem că:

$$G=\bigoplus_{n\in N^*} X_n,$$

unde, pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$, X_n este izomorf cu X. Definim:

$$\varepsilon : G \to H$$

astfel încât ε(G) nu este izomorf cu X. Pentru definirea lui ε avem două cazuri.

<u>Cazul 1:</u> Există un număr prim p, astfel încât $pX\neq X$, dar:

$pH=H$.

În acest caz definim:

$$\varepsilon=\bigoplus_{n\in N^*} \varepsilon_n,$$

unde:

$$\varepsilon_n : X_n \to H$$

are proprietatea că, pentru orice $x_n\in X_n$,

$$\varepsilon_n(x_n)=p^{-n}x_n.$$

Deoarece există un $x\in X\setminus pX$, rezultă că $\varepsilon(G)\subset X$.

<u>Cazul 2:</u> Există o infinitate de numere prime $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ astfel încât, pentru orice $i\geq 1$, p_i-înălţimea lui 1 în X este finită. În acest caz definim:

$$\varepsilon=\bigoplus_{n\in N^*} \varepsilon_n,$$

unde:

$$\varepsilon_n : X_n \to H$$

are proprietatea că, pentru orice $x_n\in X_n$,

$$\varepsilon_n(x_n)=p_n^{-1}(x_n).$$

Atunci obţinem că $1\notin\varepsilon(G)$. Deoarece orice două descompuneri directe ale lui G în grupuri de rang unu, sunt izomorfe, conform cu [42, 86.1], kerε nu mai poate fi sumand direct în G, ceea ce contrazice (1.2.1.3). Aşadar H este de rang finit. □

Se observă că rezultatul de la (1.2.7.4) este chiar cel de la (1.1.10), dar sub o altă formă.

Considerăm, acum, un grup G fără-torsiune, complet decompozabil şi fie:

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i, \qquad (1)$$

ca şi în (1.1), o descompunere directă a lui G în subgrupuri (sumanzi direcţi) de rang 1; deci, pentru orice $i\in I$,

$r(G_i)=1$.

Bowman şi Rangaswamy definesc, în [19], următoarea relaţie de echivalenţă (notată cu „~") pe mulţimea Γ a tipurilor tuturor subgrupurilor (sumanzilor direcţi) G_i, $i\in I$, dintr-o descompunere de forma (1) a grupului G – fără-torsiune şi complet decompozabil:

- dacă $t, t'\in\Gamma$, atunci:

  $t\sim t'$ dacă şi numai dacă există un număr natural n şi există $t_1, \ldots, t_n\in\Gamma$ astfel încât $t=t_1$, $t'=t_n$ şi, pentru orice $i=1, 2, \ldots, n-1$, t_i şi t_{i+1} sunt comparabile.

Dacă $\{\Gamma_n\}_{n\geq 1}$ este partiţia mulţimii Γ, corespunzătoare relaţiei „~",

$G(t)=\{x\in G \mid t(x)\geq t\}$ şi $G_n=\sum\{G(t) \mid t\in\Gamma_n\}$,

atunci avem următorul rezultat, demonstrat în [19]:

Teorema 1.2.7.5: *Dacă G este separabil, atunci*:

$$G=\bigoplus_{n\geq 1} G_n$$

şi fiecare G_n este total invariant şi complet decompozabil, iar tipurile oricăror doi sumanzi direcţi de rang unu ai lui G_n, sunt echivalente. □

Utilizând aceste rezultate, Hausen demonstrează în [48] următoarea teoremă de structură a unei clase de grupuri abeliene fără-torsiune, neomogene, complet decompozabile:

Teorema 1.2.7.6: *Fie G un grup fără-torsiune, complet decompozabil, neomogen, redus, astfel încât tipurile oricăror doi sumanzi direcţi de rang unu, ai lui G, sunt echivalente. Atunci G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă*:

$$G=H\oplus(\bigoplus_{k\in K} X_k), \qquad (4)$$

unde:

- *H este un grup omogen, de rang finit şi de tip t,*
- *fiecare X_k are rangul unu şi $t<t(X_k)$,*
- *pentru orice $i, j\in K$, $i\neq j$, $t(X_i)$ şi $t(X_j)$ sunt incomparabile.* □

Se observă că acest ultim rezultat este chiar caracterizarea grupurilor G_i de la punctul 1) al Teoremei 1.1.12, pentru clasa de grupuri prezentată în enunţul teoremei.

1.2.8. Module plate peste inelul endomorfismelor lor

În această secţiune vom prezenta câteva proprietăţi ale modulelor cu P.I.S.D., module care sunt plate peste inelul endomorfismelor lor. În acest sens:

- vom considera un inel asociativ, cu unitate, notat cu R;
- modulele cu care vom opera vor fi considerate drepte peste astfel de inele;

iar,

- pentru un R-modul M, vom nota cu:

$$E=End(M)$$

- inelul endomorfismelor lui.

R-modulul M va fi considerat şi E-modul stâng şi vom utiliza următoarea noţiune:

Definiţie: *([13]) Un modul M se numeşte E-plat, dacă M este plat, considerat ca E-modul stâng.*

Rezultatul următor este pur tehnic, dar ne va fi util în dezvoltările viitoare.

Lema 1.2.8.1: *Dacă π_1, π_2 şi π sunt idempotente în E astfel încât:*

$$\pi_1 M\cap\pi_1 M=\pi M,$$

atunci:

$$\pi_1 E\cap\pi_1 E=\pi E.$$

***Demonstraţie*:** Pentru început observăm că dacă:

$$\pi=\pi^2\in E,$$

atunci:

$$\pi M=(\pi E)M.$$

Rezultă că:

$$(\pi_1 E)M\cap(\pi_2 E)M=(\pi E)M. \qquad (*)$$

Fie $\alpha\in\pi_1 E\cap\pi_2 E$. Atunci:

$$\alpha=\pi_1\beta=\pi_2\gamma,$$

unde β, $\gamma\in E$. Rezultă că, pentru orice $x\in M$, există $\delta\in E$ astfel încât:

$$\alpha(x)=\pi_1\beta(x)=\pi_2\gamma(x)=\pi\delta(x).$$

Ultima egalitate implică faptul că $\alpha\in\pi E$ şi, astfel, $\pi_1 E\cap\pi_1 E\subseteq\pi E$. (i) Pe de altă parte, din relaţia $(*)$ rezultă că $\pi E\subseteq\pi_1 E\cap\pi_1 E$. (ii). Din relaţile (i) şi (ii) obţinem egalitatea cerută în enunţ. □

Acum putem demonstra rezultatul principal al acestei secţiuni:

Teorema 1.2.8.2: *R-modulul M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă*:

1) *E are P.I.S.D. (ca R-modul drept)*

şi,

2) *oricare ar fi două endomorfisme idempotente π şi ρ, ale lui M, are loc egalitatea*:

$$\pi M \cap \rho M = (\pi E \cap \rho E)M. \square$$

***Demonstraţie*:** Presupunem că M are P.I.S.D.. Orice sumand direct al lui E este de forma πE, unde $\pi \in E$ este un (endomorfism) idempotent. Atunci πM este un sumand direct în M. Fie X şi Y doi sumanzi direcţi ai lui E. Rezultă că există două elemente idempotente $\pi_1, \pi_2 \in E$ astfel încât:

$X=\pi_1 E$ şi $Y=\pi_2 E$.

În aceste condiţii $\pi_1 M$ şi $\pi_2 M$ sunt sumanzi direcţi în M. Conform ipotezei, fiind date două endomorfisme idempotente π_1 şi π_2 ale lui M, mai există un endomorfism idempotent π (al lui M) astfel încât:

$$\pi_1 M \cap \pi_2 M = \pi M.$$

Atunci, conform lui (1.2.8.1),

$$\pi_1 E \cap \pi_2 E = \pi E$$

şi, deoarece:

$$\pi M = (\pi E)M = (\pi_1 E \cap \pi_2 E)M,$$

rezultă că E are P.I.S.D. şi are loc egalitatea din enunţ.

Reciproc, presupunem că au loc afirmaţiile **1)** şi **2)**. Fie T şi S doi sumanzi direcţi în M,

$\pi_S : M \to S$ şi $\pi_T : M \to T$,

proiecţiile canonice ale lui M, corespunzătoare lui S, respectiv T. Atunci $\pi_S(E)$ şi $\pi_T(E)$ sunt sumanzi direcţi în E şi, conform ipotezei, există π - un idempotent în E astfel încât:

$$\pi_S(E) \cap \pi_T(E) = \pi E.$$

Rezultă că:

$$\pi M = (\pi E)M = (\pi_S(E) \cap \pi_T(E))M = \pi_S(M) \cap \pi_T(M) = T \cap S.$$

Aşadar, M are P.I.S.D.. $\square$

Caracterizarea inelelor care satisfac condiţia 1) din (1.2.8.2) este conţinută în:

Propoziţia 1.2.8.3: *Dacă R este un inel cu unitate, atunci el are P.I.S.D., ca R-modul drept, dacă şi numai dacă, pentru orice element idempotent $e \in R$ şi orice $r \in (1-e)Re$, idealul drept rR este proiectiv.*

***Demonstraţie*:** Observăm că:

$$R = End_R(R_R).$$

Dacă $e \in R$ este un idempotent, atunci, pentru orice $r \in (1-e)Re$,

$$r^2=0$$

şi există o descompunere a lui R de forma:

$R=I\oplus J$,

cu:

$rI\subseteq J$ şi $rJ=0$.

Notăm cu m_r înmulţirea, în R, cu r. Conform cu (1.2.4.1), R are P.I.S.D. dacă şi numai dacă şirul:

$0 \to m_r \to I \to rI \to 0$

este exact scindabil, ceea ce (vezi [70, 6.7.7]) este echivalent cu faptul că idealul rR este proiectiv. □

În continuarea acestei secţiuni se va folosi următorul concept:

Definiţie: *([13]) Un inel R se numeşte inel drept principal proiectiv dacă şi numai dacă orice ideal drept principal, al lui R, privit ca R-modul drept, este proiectiv.*

Acum, din (1.2.8.3) rezultă:

Corolarul 1.2.8.4: *Dacă R este un inel drept principal proiectiv, atunci R, privit ca R-modul drept, are P.I.S.D..* □

Revenim, acum, la tratarea omologică a lui Arnold, Lady şi Murley, aplicată la R-module de Hausen şi prezentată în secţiunea (1.2.4). Dacă I este un ideal drept al lui R şi:

$i : I \to R$

este aplicaţia de incluziune, definim:

$\Phi_I=\Phi_E\cdot(i\otimes 1_M)$,

unde:

- $\Phi_E : E\otimes_E M \to M$ notează izomorfismul natural: pentru orice $\varepsilon\otimes m\in E\otimes_E M$,

  $\Phi_E(\varepsilon\otimes m)=\varepsilon(m)$.

Observaţia 1.2.8.5: *Din definiţia lui Φ_I, rezultă că acesta este monomorfism dacă şi numai dacă $i\otimes 1_M$ este monomorfism.* □

Referitor la R-module plate se cunosc următoarele rezultate:

Teorema 1.2.8.6: *([70]) Un R-modul stâng (drept) M este plat dacă şi numai dacă, pentru orice R-modul stâng (drept) B şi orice submodul B′ al lui B, morfismul $i\otimes 1_M$ ($1_M\otimes i$) este monomorfism.* (i : B′ → B este morfismul de incluziune.) □

Teorema 1.2.8.7: *([29]) Dacă R este un domeniu de integritate în care orice ideal finit generat este 2-generat, atunci un R-modul stâng M, fără-torsiune, este plat dacă şi numai dacă, pentru orice $a, b\in R$,*

$aM\cap bM=(aR\cap bR)M$. □

Teorema 1.2.8.8: *([53]) Dacă inelul R nu are divizori ai lui 0, atunci R-modulul M este plat dacă şi numai dacă, pentru orice ideale drepte I şi J, are loc egalitatea:*

$IM \cap JM = (I \cap J)M$. □

Din (1.2.8.5) şi (1.2.8.6) rezultă:

Corolarul 1.2.8.9: *Un R-modul M este E-plat, privit ca E-modul stâng, dacă şi numai dacă, pentru orice ideal drept I, al lui R, morfismul* Φ_I *este monomorfism.* □

Se impun aici câteva observaţii:

Observaţiile 1.2.8.10: 1) *Dacă*:

$$\varepsilon : M \to M$$

este un endomorfism (al lui M), atunci (vezi secţiunea (1.2.4)):

$$H_M(\varepsilon) : E \to E$$

este un morfism de E-module drepte, cu imaginea:

$$H_M(\varepsilon)(E) = \varepsilon E$$

şi nucleul:

$$K = \ker H_M(\varepsilon) = \{\varphi \in E \mid \varepsilon\varphi = 0\} = Hom_R(M, \ker\varepsilon) = H_M(\ker\varepsilon).$$

2) *Exactitatea şirului*:

$$0 \to \ker H_M(\varepsilon) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{H_M(\varepsilon)} \varepsilon E \to 0,$$

implică exactitatea liniilor următoarei diagrame:

$$\begin{array}{ccccccc} & \ker H_M(\varepsilon)\otimes M & \xrightarrow{i\otimes 1_M} & E\otimes M & \xrightarrow{H_M(\varepsilon)\otimes 1_M} & \varepsilon E & \to 0 \\ & \downarrow \Phi_K & & \downarrow \Phi_E & & \downarrow \Phi_{\varepsilon E} & \\ 0 \to & \ker\varepsilon & \xrightarrow{j} & M & \xrightarrow{\varepsilon} & \varepsilon M & \to 0, \end{array}$$

unde i şi, respectiv j, sunt aplicaţiile de incluziune, iar toate produsele tensoriale sunt peste E.

3) $S_M(\ker\varepsilon) = Im\,\Phi_K$.

4) *Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

- ***a)*** Φ_K *este epimorfism*;
- ***b)*** $S_M(\ker\varepsilon) = \ker\varepsilon$;
- ***c)*** $\Phi_{\varepsilon E}$ *este monomorfism.* □

Având aceste rezultate, idealele drepte proiective, principale se pot caracteriza astfel:

Propoziţia 1.2.8.11: *Pentru orice* $\varepsilon \in E$, *idealul drept* εE *este proiectiv dacă şi numai dacă* $S_M(\ker\varepsilon)$ *este un sumand direct în M.*

***Demonstraţie*:** Conform cu [26, p. 377], pentru orice $\varepsilon \in E$, idealul drept εE este proiectiv dacă şi numai dacă:

$$\ker H_M(\varepsilon) = \pi E,$$

unde π este un idempotent al lui E. Deoarece:

$\pi M = Im\Phi_{\pi E}$,

rezultă că, dacă εE este proiectiv, atunci:

$S_M(ker\varepsilon) = \pi M$

este un sumand direct în M.

Reciproc, presupunem că $S_M(ker\varepsilon)$ este un sumand direct în M; adică, există un idempotent π în E astfel încât:

$S_M(ker\varepsilon) = \pi M$.

Atunci:

$\pi \in H_M(ker\varepsilon) = kerH_M(\varepsilon)$

şi, pentru orice $\alpha \in H_M(ker\varepsilon)$,

$\pi \circ \alpha = \alpha$

Rezultă că:

$kerH_M(ker\varepsilon) = \pi E$

şi idealul drept εE este proiectiv. □

Combinând cele obţinute în (1.2.8.3) şi (1.2.8.11) obţinem:

Corolarul 1.2.8.12: *Inelul E, privit ca E-modul drept, are P.I.S.D. dacă şi numai dacă, pentru orice π - idempotent în E şi orice $\varepsilon \in (1-\pi)E\pi$, $S_M(ker\varepsilon)$ este un sumand direct în M.* □

Utilizând (1.2.8.12) se poate arăta că proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi pentru inelul E nu implică aceeaşi proprietate şi pentru R-modulul M. (vezi [13, p. 523])

Alte consecinţe a lui (1.2.8.11) sunt:

Corolarul 1.2.8.13: *Inelul E, al endomorfismelor R-modulului M, este un inel drept principal proiectiv dacă şi numai dacă, pentru orice endomorfism ε, al lui M, $S_M(ker\varepsilon)$ este un sumand direct în M.* □

Corolarul 1.2.8.14: *Nucleul oricărui endomorfism ε, al lui M, este un sumand direct în M dacă şi numai dacă idealul εE este proiectiv şi*:

$ker\varepsilon = S_M(ker\varepsilon)$. □

Din (1.2.8.13) şi (1.2.8.14) rezultă:

Corolarul 1.2.8.15: *Nucleul oricărui endomorfism al lui M este un sumand direct în M dacă şi numai dacă inelul End(M) este principal proiectiv drept şi, pentru orice endomorfism ε, al lui M*,

$ker\varepsilon = S_M(ker\varepsilon)$. □

Utilizând, în special, caracterizarea modulelor plate din [53], R-modulele E-plate pot fi caracterizate astfel (vezi [13]):

Teorema 1.2.8.16: *R-modulul M este plat peste inelul E, al endomorfismelor sale, dacă şi numai dacă*:

1) *pentru orice* $\varepsilon \in E$,

$$\ker\varepsilon = S_M(\ker\varepsilon)$$

şi:

2) *pentru orice ideale drepte (finit generate) I şi J ale lui E, are loc egalitatea*:

$$IM \cap JM = (I \cap J)M. \square$$

Din (1.2.8.2) şi (1.2.8.16) rezultă:

Corolarul 1.2.8.17: *Dacă R-modulul M este E-plat, atunci M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă* E_E *are această proprietate*. □

Combinând cele obţinute în (1.2.8.4) şi (1.2.8.17) obţinem:

Corolarul 1.2.8.18: *Dacă M este E-plat şi E este un inel drept principal proiectiv, atunci M are P.I.S.D.*. □

În final se impun iarăşi două observaţii:

Observaţiile 1.2.8.19: 1) *Din cele demonstrate în [37] şi în [13, p. 525] rezultă că proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi nu poate fi caracterizată numai cu ajutorul inelului endomorfismelor sale*.

2) *Din [13, p. 526] rezultă că modulele cu P.I.S.D. nu sunt, neaparat, E-plate*. □

CAPITOLUL 2

GRUPURI ABELIENE CU P.I.S.D.

În prezentul capitol vom prezenta, în exclusivitate, rezultate referitoare la grupurile abeliene cu proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi. Astfel se vor prezenta aici:

- *teoremele de structură pentru cinci clase de grupuri abeliene cu P.I.S.D.* şi aplicaţii imediate ale acestora;
- *alte caracterizări*, decât cele prezentate în capitolul precedent, *ale acestor grupuri*;
- *un studiu al subgrupurilor şi grupurilor factor al grupurilor cu această proprietate*,

iar în ultimul subcapitol,

- *vom determina toate grupurile abeliene cu proprietatea că orice subgrup al lor are P.I.S.D.*.

Peste tot în acest capitol prin grup vom înţelege grup abelian în notaţie aditivă, iar cu **P** vom nota mulţimea tuturor numerelor prime.

2.1. TEOREMELE DE STRUCTURĂ ALE UNOR CLASE DE GRUPURI ABELIENE CU P.I.S.D. ȘI APLICAȚII IMEDIATE ALE ACESTORA

Determinarea structurii anumitor grupuri cu P.I.S.D. ne va fi foarte utilă în dezvoltările viitoare. Aşa cum am precizat în partea de introducere, începem cu grupurile libere, nu pentru că nu se cunoaşte structura acestor grupuri sau pentru că grupurile libere cu P.I.S.D. ar avea o structură deosebită, ci pentru a începe studiul grupurilor cu P.I.S.D. cu justificarea celor două afirmaţii ale lui Fuchs, despre care am vorbit în prima parte a prezentei cărți.

2.1.1. Grupuri libere

Începem prezentarea rezultatelor din această secţiune prin a arăta că grupurile libere au P.I.S.D..

Propoziţia 2.1.1.1: *Fie F un grup liber, G un subgrup al lui F şi H un sumand direct în F. Atunci $G \cap H$ este un sumand direct în G.*

***Demonstraţie*:** Presupunem că:

$F=H\oplus K$

este un grup liber. Atunci, conform celei de-a doua teoreme de izomorfism:

$G/G\cap H\cong(G+H)/H\subseteq F/H\cong K.$

Din [41, 14.5] rezultă că subgrupul K este liber şi, deci, $G/(G\cap H)$ este liber. În acest caz, conform cu [41, 14.4], $G\cap H$ este un sumand direct în G. □

Considerând în (2.1.1.1) pe G ca fiind sumand direct în F, obţinem:

Corolarul 2.1.1.2: *Grupurile libere au P.I.S.D..* □

Utilizând (2.1.1.2) şi inducţia completă obţinem:

Corolarul 2.1.1.3: *Intersecţia unui număr finit de sumanzi direcţi ai unui grup liber este tot un sumand direct, în acel grup.* □

Reamintim noţiunea de grup χ_σ-liber.

Definiţii: *([41, p. 94]) Fie σ un ordinal oarecare. Pentru un cardinal χ_σ, numim grup χ_σ-liber, un grup care are proprietatea că toate subgrupurile de cardinal mai mic decât χ_σ sunt libere. Grupurile χ_0-libere se numesc grupuri libere numărabile, iar grupurile χ_1-libere se numesc grupuri libere de puterea continuului.*

Propoziţia 2.1.1.4: *Grupurile libere numărabile au C.P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Fie A un grup liber numărabil, $\{B_i\}_{i\in I}$ o familie oarecare de sumanzi direcţi ai lui A şi:

$$B=\bigcap_{i\in I} B_i .$$

Dacă $\{a_i\}_{i\in I}$ sunt generatorii lui A, deci, pentru orice $i\in I$, $a_i\cong \mathbf{Z}$, notăm cu:

$$G=(\prod_{i\in I}\langle a_i\rangle)/B.$$

Deoarece un produs infinit (numărabil) de grupuri ciclice infinite este χ_1-liber, conform cu [41, 19.2], rezultă că G este χ_1-liber. Cum A/B este un subgrup în G, de cardinal mai mic, rezultă că A/B este liber. Iarăşi [41, 14.4] completează demonstraţia. □

Acum putem justifica afirmaţia de la (1.2.2.8). Deoarece Teorema 19.2 din [41] nu este valabilă şi pentru grupuri abeliene de puterea continuului, rezultă că dacă A este un astfel de grup, $\{B_i\}_{i\in I}$ este o familie oarecare de sumanzi direcţi ai lui A (I fiind o mulţime de puterea continuului) şi:

$$B=\bigcap_{i\in I} B_i ,$$

atunci A/B nu mai este liber şi, astfel, B poate să nu mai fie sumand direct în A. Deci, grupurile libere de puterea continuului au P.I.S.D., dar nu au C.P.I.S.D..

Se impune aici o observaţie:

Observaţia 2.1.1.5: *Faptul că un grup liber are P.I.S.D. se mai poate demonstra, cel puţin, în următoarele două feluri*:

1) *Aplicând (1.1.7), căci orice grup liber este complet decompozabil şi omogen*;

2) *Aplicând (1.2.5.5), pentru*:

$R=M=\mathbf{Z}$,

caz în care $End(M)\cong\mathbf{Z}$, *vezi [41, §15].* □

Ca o primă aplicaţie a celor prezentate mai sus, utilizând grupuri de extensii, putem acum să redăm o condiţie suficientă pentru ca un grup să aibă P.I.S.D..

Propoziţia 2.1.1.6: *Dacă G este un grup cu proprietatea că, pentru orice două grupuri A şi B şi orice monomorfism*:

$\alpha : A \to B$,

aplicaţia indusă:

$\alpha_* : Ext(G,A) \to Ext(G,B)$

este monomorfism, atunci G are P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Fie:

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

un şir exact. Din [41, 51.3] rezultă că şirul:

$$0 \to Hom(G,A) \to Hom(G,B) \to Hom(G,C) \xrightarrow{E_*}$$

$$Ext(G,A) \xrightarrow{\alpha_*} Ext(G,B) \xrightarrow{\beta_*} Ext(G,C) \to 0$$

este exact. Aplicaţia α_* este monomorfism exact dacă, pentru orice:

$\eta : G \to C$, $E_*(\eta)=E\eta\in Ext(G,A)$

este o extensie scindabilă. Aceasta este echivalent cu faptul că G este liber, conform cu [41, 52(A)]. Acum (2.1.1.2) completează demonstraţia. □

În finalul acestei secţiuni mai prezentăm două aplicaţii ale celor demonstrate aici. Pentru aceasta, însă, avem nevoie de următoarea definiţie:

Definiţie: *([42, §99]) Numim grup Whitehead (prescurtat W-grup) un grup G care satisface relaţia*:

$$Ext(G,\mathbf{Z})=0. \quad (5)$$

O aplicaţie a lui (2.1.1.4) este:

Propoziţia 2.1.1.7: *Orice W-grup, orice subgrup al unui W-grup şi orice sumă directă de W-grupuri are C.P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Deoarece orice subgrup al unui W-grup şi orice sumă directă de W-grupuri este tot un W-grup, conform cu [42, 99,(b),(c)], iar din [42, 99.1] rezultă că un W-grup este χ_0-liber, enunţul rezultă din (2.1.1.4). □

Dacă în relaţia (5) considerăm în locul lui **Z**, un grup liber F, de rang infinit m, atunci obţinem o aplicaţie a lui (2.1.1.2).

Propoziţia 2.1.1.8: *Dacă F este un grup liber de rang infinit m şi G este un grup care satisface relaţia*:

$$Ext(G,F)=0, \tag{6}$$

atunci au loc următoarele afirmaţii:

1) *Pentru orice subgrup H, de rang cel mult egal cu m, al lui G, orice extensie a lui H prin F are P.I.S.D.*;

2) *Orice subgrup B de indice cel mult egal cu m, al lui G, conţine un sumand direct C, de indice m (în G), astfel încât orice extensie a lui F prin C are P.I.S.D.*.

***Demonstraţie*:** **1)** Fie G şi H ca şi în enunţ. Atunci, conform ipotezei, şirul:

$$0 \to K \to F \to G \to 0,$$

unde F este un grup liber de rang m şi K este un subgrup în F, este scindabil. Conform lui [41, 14.5], rezultă că G şi H sunt libere. Atunci orice extensie L a lui H prin F este scindabilă şi L este liber. Acum (2.1.1.2) arată că L are P.I.S.D..

2) Conform celor demonstrate la punctul 1), dacă A şi B sunt subgrupuri în G astfel încât:

$$G=A+B$$

şi B este de indice cel mult egal cu m, atunci B este liber. Considerând suma directă externă $A\oplus B$ şi C - un subgrup în B (de indice m, în G), obţinem următorul şir exact scindabil:

$$0 \to C \to A\oplus B \to G \to 0.$$

Deci C este un sumand direct în B. În continuare raţionăm ca şi la punctul 1). □

2.1.2. Grupuri de torsiune

Vom obţine structura grupurilor de torsiune cu P.I.S.D., pornind de la cele demonstrate în Subcapitolul 1.1. Desigur că determinarea structurii acestor grupuri se va face abstracţie făcând de un izomorfism. Începem cu un rezultat simplu:

Observaţia 2.1.2.1: *Deoarece într-un grup elementar orice subgrup al său este un sumand direct (vezi [41, §17, p. 89]), rezultă că această clasă de grupuri are C.P.I.S.D..* □

Din (1.1.5) rezultă:

Corolarul 2.1.2.2: *p-grupul G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă*:

1) *există un* $n\in \mathbf{N}^*$ *astfel încât*:

$$G=\mathbf{Z}(p^n), \tag{7}$$

sau:

2) *există un cardinal* m_p *astfel încât*:

$$G=(\oplus_{m_p}\boldsymbol{Z}(p))\oplus C_p, \quad (8)$$

unde:

- $C_p=0$ *sau* $C_p=\boldsymbol{Z}(p^\infty)$. □

Deoarece orice grup de torsiune este o sumă directă de p-subgrupuri ale sale ([41, 8.4]), obţinem imediat structura grupurilor de torsiune cu P.I.S.D..

Propoziţia 2.1.2.3: *Un grup de torsiune G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă este de forma*:

$$G=(\bigoplus_{p\in P_0} G_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_1} B_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_1} C_p), \quad (9)$$

unde:

- P_0 *şi* P_1 *sunt submulţimi disjuncte de numere prime*;
- *pentru orice* $p\in P_0$, G_p *este un p-grup idecompozabil, neelementar*;
- *pentru orice* $p\in P_1$,

$pB_p=0$, $C_p=0$ *sau* $C_p=\boldsymbol{Z}(p^\infty)$.

Demonstraţie**:** Fie,

$$G=\bigoplus_{p\in P} G_p$$

descompunerea directă a lui G în p-subgrupurile sale, conform cu [41, 8.4]. Din (1.1.3) rezultă că G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă, pentru fiecare $p\in P$, G_p are această proprietate. Acum (2.1.2.2) completează această demonstraţie. □

Corolarul 2.1.2.4: *Un grup de torsiune G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă este de forma*:

$$G=(\bigoplus_{p\in P_0} \boldsymbol{Z}(p^{n_p}))\oplus(\bigoplus_{p\in P_1} (\oplus_{m_p}\boldsymbol{Z}(p))\oplus(\bigoplus_{p\in P_2} C_p), \quad (10)$$

unde:

- P_0, P_1 *şi* P_2 *sunt submulţimi de numere prime astfel încât*:

$P_1\cap(P_2\cup P_3)=\emptyset$,

- *pentru orice* $p\in P_0$, n_p *este un număr natural nenul*,
- *pentru orice* $p\in P_1$, m_p *este un cardinal nenul oarecare*,
- *pentru orice* $p\in P_2$,

$C_p=\boldsymbol{Z}(p^\infty)$. □

Se observă că din (2.1.2.4), pentru dacă P_0 şi P_2 sunt mulţimi vide, atunci se obţine rezultatul de la (2.1.2.1).

2.1.3. Grupuri divizibile

Principalul rezultat al acestei secţiuni va fi teorema de structură a grupurilor divizibile cu P.I.S.D.. Pentru început avem următoarea lemă:

Lema 2.1.3.1: *Orice grup divizibil şi fără-torsiune are C.P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Fie G un grup abelian fără-torsiune şi divizibil. Atunci G este un spaţiu vectorial peste **Q** (G este o sumă directă de exemplare de **Q**). Cum orice spaţiu vectorial, peste un corp, are C.P.I.S.D. (conform cu [70, 6.4.35c)]) lema este demonstrată. □

Se cuvine să facem aici două observaţii:

Observaţiile 2.1.3.2: 1) *Deoarece inelul **Z** este noetherian, (2.1.3.1) poate fi privit (şi) ca un corolar al lui (1.2.2.2).*

2) *Deoarece*:

$End_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} \cong \mathbf{Q}$,

Lema 2.1.3.1 poate fi privită (şi) ca o consecinţă imediată a Teoremei 1.2.5.5. □

O aplicaţie imediată a lui (2.1.3.1) este:

Teorema 2.1.3.3: *Fie G un grup fără-torsiune. În oricare din următoarele situaţii, G are C.P.I.S.D.*:

1) *G nu are subgrupuri maximale*;
2) *Orice imagine epimorfică a lui G este infinită*;
3) *Pentru orice sistem maximal independent în G,*

$$L=\{a_i\}_{i\in I}$$

şi, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ şi orice $i\in I$, n/a_i.

***Demonstraţie*:** Vom arăta că, în toate cele trei cazuri, grupul G este divizibil. Vom putea aplica, astfel, (2.1.3.1).

1) Dacă G nu are subgrupuri maximale, atunci:

G=F(G),

unde F(G) este subgrupul său Frattini (care este intersecţia tuturor subgrupurilor maximale ale lui G - vezi Secţiunea 2.3.4). Cum,

$$F(G)=\bigcap_{p\in P} pG,$$

vezi (2.3.4.1), rezultă că, pentru orice p - număr prim, $G\subseteq pG$, adică G este p-divizibil. Conform cu [41, 20.(A)], grupul G este divizibil.

2) Presupunem că G nu este divizibil. Conform punctului 1), G are un subgrup maximal M. În acest caz $|G : M|$ este un număr prim p, vezi (tot) (2.3.4.1). Deci G/M este o imagine epimorfică finită a lui G, contradicţie cu ipoteza. Aşadar, G este divizibil.

3) Fie:

$L=\{a_i\}_{i\in I}$

un sistem maximal independent în G, cu proprietatea că, pentru orice $i\in I$ şi, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$, $n\,|\,a_i$. Atunci, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ şi, pentru orice $a\in\langle L\rangle$, avem: $n\,|\,a$. Rezultă că $\langle L\rangle$ este divizibil. Din [41, 21.2] obţinem că există un subgrup B a lui G astfel încât:

$G=\langle L\rangle\oplus B$.

Dacă $B\neq 0$, atunci considerăm:

$L'=\{b_j\}_{j\in J}$

un sistem maximal independent în B. Atunci $L\cup L'$ este un sistem maximal independent în G, ceea ce contrazice maximalitatea lui L. Rezultă că:

$B=0$

şi, astfel, G este divizibil. □

Folosind grupuri de extensii obţinem alte aplicaţii ale lui (2.1.3.1).

Teorema 2.1.3.4: ***1)*** *Dacă Ext(G,A) este un grup divizibil, pentru orice grup abelian A, atunci Ext(G,A) şi G au ambele C.P.I.S.D..*

2) *Dacă T este un grup redus, mărginit, cu P.I.S.D., atunci Ext(**Q**/**Z**,T) are C.P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** **1)** Considerăm şirul exact (E):

$$0 \to G[m] \to G \xrightarrow{m} mG \to 0,$$

unde „*m*” notează înmulţirea cu $m\in\mathbf{N}^*$, în G; numărul m fiind ales arbitrar. Din [41, 51.3] rezultă că, oricare ar fi grupul A, şirul:

$$\mathrm{Ext}(mG,A) \xrightarrow{m^*} \mathrm{Ext}(G,A) \to \mathrm{Ext}(G[m],A) \to 0$$

este exact. Conform ipotezei,

$m\mathrm{Ext}(G,A)=\mathrm{Ext}(G,A)$.

Rezultă că, pentru orice grup A:

$\mathrm{Ext}(G[m],A)=0$.

Conform cu [41, §52.(A)], obţinem că G[m] este liber; deci G[m] este fără-torsiune. Aşadar:

$G[m]=0$

şi din exactitatea şirului (E) obţinem că, pentru orice $m\in\mathbf{N}^*$:

$G=mG$.

Deci, G este divizibil şi fără-torsiune. Din [41, §52.(D)] rezultă că şi Ext(G,A) este tot un grup divizibil şi fără-torsiune. Acum (2.1.3.1) completează demonstraţia.

2) Fie T un grup ca şi în enunţ. Mai întâi demonstrăm că Ext(**Q**/**Z**,T) este o sumă directă de două grupuri total invariante, fiecare având C.P.I.S.D.. Considerăm şirul exact (E):

$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0.$

Tot din [41, 51.3] obţinem următorul şir exact (E^*):

$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},T) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{Q},T) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{Z},T) \to \mathrm{Ext}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},T) \to$

$\mathrm{Ext}(\mathbf{Q},T) \to \mathrm{Ext}(\mathbf{Z},T) \to 0.$

Dar,

$\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},T)=\mathrm{Hom}(\mathbf{Q},T)=0,$

conform cu [41, §43.(A).(iii)], iar din [41, §43, p. 181] rezultă că:

$\mathrm{Hom}(\mathbf{Z},T)\cong T.$

Pe de altă parte,

$\mathrm{Ext}(\mathbf{Z},T)=0,$

vezi [41, §52.(A)]. Rezultă că şirul (E^*) devine (E^{**}):

$0 \to T \to \mathrm{Ext}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},T) \to \mathrm{Ext}(\mathbf{Q},T) \to 0.$

Deoarece T este compact algebric, conform cu [41, 40.1 şi 40.3], şi T este izomorf cu partea de torsiune a lui Ext(**Q**/**Z**,T), conform cu [41, 55.1], rezultă că şirul (E^{**}) este scindabil, căci în acest caz T devine un subgrup pur în Ext(**Q**/**Z**,T). Aşadar:

$\mathrm{Ext}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},T)\cong T\oplus \mathrm{Ext}(\mathbf{Q},T).$

Conform ipotezei, T este o sumă directă finită de p-grupuri reduse cu P.I.S.D.. Atunci fiecare p-componentă a lui T este idecompozabil sau elementar; deci, fiecare p-componentă a lui T are C.P.I.S.D. şi, conform cu (1.1.3), T are C.P.I.S.D.. Din [41, 52.(J)] rezultă că Ext(**Q**,T) este un grup divizibil şi fără-torsiune; deci, conform cu (2.1.3.1), Ext(**Q**,T) are C.P.I.S.D.. Deoarece T şi Ext(**Q**,T) sunt total invariante în Ext(**Q**/**Z**,T), Lema (1.1.2) completează demonstraţia. □

Prezentăm acum teorema de structură a grupurilor divizibile cu P.I.S.D..

Teorema 2.1.3.5: *Un grup divizibil G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă*:

$$G=\bigoplus_{p\in P_1} \boldsymbol{Z}(p^{\infty}), \quad (11)$$

sau:

$$G=\bigoplus_{r_0} \boldsymbol{Q}, \quad (12)$$

unde:

- *P_1 este o submulţime a mulţimii **P** a tuturor numerelor prime*,
- *$r_0(=r_0(G))$ este rangul fără-torsiune al lui G*.

***Demonstraţie*:** Fie G un grup divizibil cu P.I.S.D.. Atunci T(G) şi G/T(G) au aceeaşi proprietate, conform cu (1.1.1). Conform lui (1.2.2.2), G nu poate fi mixt. Din (2.1.2.3) rezultă că un grup divizibil şi de torsiune G, are P.I.S.D. dacă şi numai dacă există o submulţime P_1 a mulţimii **P** a tuturor numerelor prime astfel încât:

$$G=\bigoplus_{p\in P_1} \mathbf{Z}(p^\infty).$$

Aşa cum am precizat în demonstraţia lui (2.1.3.1), un grup divizibil, fără-torsiune, este o sumă directă de exemplare de **Q**, numărul acestor exemplare fiind egal cu rangul fără-torsiune al grupului, vezi [41, 23.1]. În consecinţă, grupul G este de forma (11) sau de forma (12).

Reciproc, deoarece grupurile de forma (11), sau de forma (12) au P.I.S.D., conform cu (2.1.2.3) şi, respectiv (2.1.3.1), demonstraţia este gata. □

Deoarece inelul **Z** este noetherian (vezi [69, 4.10.19]), din (2.1.3.5) şi (1.2.2.2) rezultă:

Corolarul 2.1.3.6: *Un grup G de forma (11) sau de forma (12) are C.P.I.S.D..* □

Dacă P_1 coincide cu întrega mulţime **P** a tuturor numerelor prime, atunci din [23, p. 30] şi (2.1.3.6) obţinem:

Corolarul 2.1.3.7: *Grupul factor **Q/Z** are C.P.I.S.D..* □

2.1.4. Grupuri fără-torsiune

Anumite tipuri de grupuri fără-torsiune cu P.I.S.D. au fost caracterizate în capitolul precedent şi în secţiunea (2.1.3). În această secţiune vom completa rezultatele referitoare la această clasă de grupuri.

Pentru început avem:

Propoziţia 2.1.4.1: *Orice grup fără-torsiune se scufundă izomorf într-un grup cu C.P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Fie G un grup fără-torsiune. Conform cu [41, 24.1], există un grup divizibil D, care îl conţine pe G. Atunci, din [41, 24.4] rezultă că D conţine un subgrup minimal divizibil E, care îl conţine pe G. În acest caz G este esenţial în E, conform cu [23, 3.2.6]. Fie T partea de torsiune a lui E. Dacă $T\neq 0$, atunci $T\cap G\neq 0$ şi $T\cap G$ este şi de torsiune, ca subgrup al lui T, şi fără-torsiune, ca subgrup al lui G, ceea ce este imposibil. Aşadar E este fără-torsiune şi divizibil. Acum (2.1.3.1) completează demonstraţia. □

Particularizând (1.2.5.4) pentru grupuri abeliene, obţinem următorul rezultat:

Corolarul 2.1.4.2: *Fie*:

$$G=D\oplus B$$

un grup fără-torsiune, cu D - divizibil şi B - redus. Atunci G are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.) dacă şi numai dacă:

1) *B are P.I.S.D. (C.P.I.S.D.)*,

iar,

2) *dacă $D\neq0$, atunci B este un subgrup complet decompozabil, omogen şi de rang finit.* □

Din (2.1.4.2) rezultă că şi în cazul grupurilor abeliene, problema determinării grupurilor fără-torsiune cu P.I.S.D. se rezumă la determinarea grupurilor fără-torsiune, reduse, cu această proprietate.

Din (1.1.11) şi (1.1.12) obţinem imediat structura unui grup fără-torsiune, complet decompozabil, cu P.I.S.D..

Corolarul 2.1.4.3: *Fie G un grup fără-torsiune, complet decompozabil.*

1) *Dacă G este neredus, atunci el are P.I.S.D. dacă şi numai dacă este de forma*:

$$G=(\oplus_m \mathbf{Q})\oplus(\oplus_n C), \tag{13}$$

unde:

- *m este un cardinal oarecare, iar n este un număr natural*;
- *C este un grup redus, de rang unu.*

2) *Dacă G este redus, atunci el are P.I.S.D. dacă şi numai dacă G este sau idecompozabil, sau are una din următoarele forme*:

$$G=\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{m_i} G_i), \tag{14}$$

unde:

- *pentru orice $i\in I$, m_i este un cardinal oarecare, iar G_i este un grup (redus) de rang unu*;
- *pentru orice $i_1, i_2\in I$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt tipuri incomparabile*;

sau:

$$G=(\oplus_n B)\oplus(\bigoplus_{i\in I} G_i), \tag{15}$$

unde:

- *n este un număr natural şi B este un grup (redus) de rang unu şi de tip ν*;
- *pentru orice $i\in I$, G_i este un grup (redus) de rang unu şi de tip μ_i, cu $\nu<\mu_i$*;
- *pentru orice $i_1, i_2\in I$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt tipuri incomparabile.* □

Tot din (2.1.4.2) rezultă că orice grup fără-torsiune, neredus, cu P.I.S.D., este complet decompozabil. Cu toate că nu putem prezenta o structură a grupurilor fără-torsiune cu această proprietate, totuşi vom generaliza câteva rezultate din capitolul precedent, referitoare la aceste grupuri.

Teorema 2.1.4.4: *Dacă A, B şi C sunt grupuri reduse, idecompozabile, fără-torsiune, astfel încât grupul*:

$$G=A\oplus B\oplus C$$

are P.I.S.D., $Hom(A,C)\neq0$ şi $Hom(B,C)\neq0$, atunci:

Hom(A,B)≠0 *şi* *Hom(B,A)≠0.*

***Demonstraţie*:** Fie A, B, C şi G grupuri ca şi în enunţ. Conform ipotezei şi lui (1.2.4.1) există monomorfismele:

$f : A \to C$ şi $g : B \to C$.

Deoarece C este redus, există un număr natural n≠0 astfel încât $g(B)\not\subset nf(A)$. Fie:

$h : A\oplus B \to C$

definită prin: pentru orice $(a,b)\in A\oplus B$,

$h((a,b))=n\cdot f(g)+g(h)$.

Dacă G are P.I.S.D., atunci, conform cu (1.2.1.3),

$A\oplus B=\ker h\oplus X$,

unde X este un grup de rang unu. Dacă:

$\pi_B : A\oplus B \to B$ şi $\pi_X : A\oplus B \to X$

sunt proiecţiile canonice ale lui A⊕B pe sumanzii B, respectiv X, atunci $A\not\subset \ker h$, căci A este fără-torsiune, şi, deci, $\pi_X(A)\neq 0$. Presupunem că:

$\pi_B(X)=0$.

Atunci $X\subseteq A$ şi:

$f(B)=h(B)\subseteq h(X)\subseteq h(A)=nf(A)$,

ceea ce este în contradicţie cu alegerea lui n. Rezultă că:

$\pi_B(X)\neq 0$.

Dacă există $0\neq Y\leq X$ astfel încât:

$\pi_B(Y)=0$,

atunci $Y\leq A\cap X$ - care este un sumand direct nenul al lui X; aceasta este o contradicţie cu faptul că X este idecompozabil. Deci, $\pi_{B|_X}$ este monomorfism şi, astfel, $(\pi_B\circ\pi_X)(A)\neq 0$. Deci, aplicaţia compusă:

$A \xrightarrow{\pi_X} X \xrightarrow{\pi_B} B$

este un monomorfism. Aşadar, Hom(A,B)≠0. Analog se arată că şi Hom(B,A)≠0. □

Din (2.1.4.4) şi (1.2.2.3) rezultă:

Corolarul 2.1.4.5: *Dacă A, B, C şi G sunt ca şi în (2.1.4.4) şi, în plus C este de rang finit, atunci A, B şi G sunt (tot) de rang finit şi A este cvasi-izomorf cu B*. □

Se observă că (1.2.7.3) şi (1.2.7.4) sunt consecinţe imediate ale lui (2.1.4.5).

Încheiem această secţiune cu încă o caracterizare a grupurilor fără-torsiune, nereduse, cu P.I.S.D..

Corolarul 2.1.4.6: *Dacă G este un grup fără-torsiune, neredus, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *G are C.P.I.S.D.*;

2) *G are P.I.S.D.*;

3) *În G orice subgrup pur este un sumand direct*.

***Demonstraţie*:** Din (1.2.3.11) rezultă că **1)** este echivalent cu **2)**.

2) implică **3)** Presupunem că are loc afirmaţia de la punctul 2). Atunci, conform cu (2.1.4.2), partea redusă a lui G este un grup (redus) complet decompozabil, omogen, de rang finit. Din [43, Teorema 2.a)] rezultă că are loc afirmaţia de la punctul 3).

3) implică **2)** Dacă are loc afirmaţia de la punctul 3), atunci intersecţia oricăror doi sumanzi direcţi ai lui G este o intersecţie de subgrupuri pure şi, conform ipotezei, este un sumand direct. Deci, în acest caz, G are P.I.S.D.. □

2.1.5. Grupuri mixte

Se ştie că orice inel comutativ cu ideale principale este un domeniu noetherian (vezi [69, 4.10.19]); deci aplicând (1.2.2.5) la grupuri abeliene obţinem:

Corolarul 2.1.5.1: *Fie*:

$$G=D\oplus B$$

un grup cu P.I.S.D., cu D - subgrupul său maximal divizibil şi B - partea sa redusă. Atunci au loc următoarele afirmaţii:

1) *Dacă D este de torsiune, atunci şi B este de torsiune*;

2) *Dacă D este fără-torsiune, atunci*:

$$B=T\oplus C,$$

unde T este partea de torsiune a lui G, iar C este un grup fără-torsiune, omogen, complet decompozabil, de rang finit. □

Rezultatul de mai sus ne permite să prezentăm structura grupurilor abeliene, mixte, nereduse, cu P.I.S.D..

Propoziţia 2.1.5.2: *Fie G un grup mixt, neredus. Atunci G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă (el) este de forma*:

$$G=(\oplus_{m_0}\boldsymbol{Q})\oplus((\bigoplus_{p\in P_0}\boldsymbol{Z}(p^{n_p})\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_{m_p}\boldsymbol{Z}(p))\oplus(\oplus_n H), \quad (16)$$

unde:

- *m_0 este un cardinal oarecare, iar **Q** este grupul (aditiv) al numerelor raţionale*;
- *P_0 este o submulţime a mulţimii **P** a tuturor numerelor prime şi, pentru orice $p\in P_0$, n_p este un număr natural, cu $n_p\geq 2$*;
- *P_1 este tot o submulţime a mulţimii **P**, cu*:

$$P_0\cap P_1=\varnothing$$

şi, pentru orice $p\in P_1$, m_p este un cardinal oarecare;

- *n este un număr natural, iar H este un grup fără-torsiune, redus, de rang unu*;
- *pentru orice $p\in P_0$ şi pentru orice $q\in P_1$,*

$$Hom(H,\mathbf{Z}(p^{n_p}))=Hom(H,\mathbf{Z}(q))=0.$$

***Demonstraţie*:** Fie G un grup mixt, neredus, cu P.I.S.D.. Din (2.1.5.1) rezultă că:

$$G=D\oplus T\oplus C, \qquad (*)$$

unde D este subgrupul maximal divizibil al lui G şi D este fără-torsiune, T este partea de torsiune a lui G, care este un grup redus, iar C este un grup fără-torsiune, redus, complet decompozabil, de rang finit. Conform lui (1.1.1), subgrupurile D, T şi C au fiecare P.I.S.D.. Deci au loc următoarele afirmaţii:

a) există un cardinal m_0 astfel încât:

$$D=\oplus_{m_0}\mathbf{Q};$$

b) fiecare p-componentă a lui T este sau un p-grup idecompozabil, sau un p-grup elementar; deci, există P_0 şi P_1 două submulţimi disjuncte, ale mulţimii **P** a tuturor numerelor prime astfel încât: pentru orice $p\in P_0$ există un număr natural $n_p\geq 2$ şi, pentru orice $p\in P_1$, există un cardinal m_p astfel încât:

$$T=(\bigoplus_{p\in P_0}\mathbf{Z}(p^{n_p})\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p));$$

c) există un număr natural n şi un grup H fără-torsiune, redus, de rang unu, astfel încât:

$$C=\oplus_n H.$$

Având în vedere toate acestea, din relaţia (∗) obţinem că G are forma (16). Ultima afirmaţie din enunţ rezultă din (1.2.4.1).

Reciproc, presupunem că G este de forma (16). Notând cu:

$$D=\oplus_{m_0}\mathbf{Q}, \qquad T=(\bigoplus_{p\in P_0}\mathbf{Z}(p^{n_p})\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))$$

şi, respectiv:

$$C=\oplus_n H,$$

obţinem relaţia (∗) din prima parte a demonstraţiei. Pe de altă parte, D are P.I.S.D., conform cu (2.1.3.1), T are P.I.S.D., conform cu (2.1.2.4), iar C are P.I.S.D., conform cu (1.1.7). Rezultă, conform lui (2.1.4.2), că D⊕C are P.I.S.D.. Conform ultimei afirmaţii din enunţ, rezultă că:

$$Hom(H,A)=0,$$

pentru orice sumand direct idecompozabil A al lui T. Rezultă că pentru acelaşi sumand direct A, obţinem că:

Hom(C,A)=Hom(D⊕C,A)=0.

Aşadar, T şi D⊕C sunt subgrupuri total invariante în G, fiecare având P.I.S.D.. (Deoarece fiecare p-componentă a lui T este un subgrup total invariant în G, rezultă că şi T este total invariant în G, conform cu [41, p. 14].) Acum (1.1.2) completează demonstraţia. □

Corolarul 2.1.5.3: *Dacă G este un grup mixt, neredus, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

- ***1)*** *G are C.P.I.S.D.*;
- ***2)*** *G are P.I.S.D.*;
- ***3)*** *G este de forma (16) din (2.1.5.2).*

Demonstraţie*:** Conform observaţiei (1.1) şi lui (2.1.5.2) este suficient să demonstrăm că „2)*** *implică* ***1)***”. Presupunem că G are P.I.S.D.. Vom folosi notaţiile din (2.1.5.2). Din (2.1.3.6) rezultă că D are C.P.I.S.D.. Deoarece fiecare p-componentă a lui T este sau un p-grup idecompozabil, caz în care are, în mod trivial, C.P.I.S.D., sau este un p-grup elementar, caz în care această p-componentă are C.P.I.S.D., conform cu (2.1.2.1), din (1.1.2) rezultă că T are C.P.I.S.D.. Datorită faptului că C are rang finit, rezultă că şi D⊕C are C.P.I.S.D., conform lui (2.1.4.4). Iarăşi (1.1.2) completează demonstraţia. □

Observaţia 2.1.5.4: *Relaţia (16) cuprinde toate subcazurile următoare*:

- ***1)*** $P_0=\varnothing$,
- ***2)*** $P_0=\boldsymbol{P}$,
- ***3)*** $P_1=\varnothing$,
- ***4)*** $P_1=\boldsymbol{P}$,
- ***5)*** $P_0\cup P_1=\boldsymbol{P}$,
- ***6)*** $n=0$,

precum şi orice combinaţie posibilă a acestora. Remarcăm faptul că dacă:

$m=0$,

adică G este redus, atunci, conform cu (1.1.7), grupul obţinut are P.I.S.D., oricare ar fi cardinalul n, nu neaparat finit. În acest caz, sumandul redus, fără-torsiune, al lui G, este un grup de forma (14) sau de forma (15). □

Corolarul 2.1.5.5: *Orice sumand direct al unui grup de forma (16) este tot un grup de forma (16).*

***Demonstraţie*:** Deoarece orice sumand direct al unui grup mixt scindabil este tot un grup mixt scindabil, conform cu [42, §100, p. 188], enunţul rezultă din (1.1.1) şi (2.1.5.2). □

Din (2.1.5.1) rezultă că orice grup mixt, neredus, cu P.I.S.D. este scindabil. Pe de altă parte, aşa cum am precizat şi în Observaţia 2.1.5.4, există grupuri mixte, reduse, scindabile, cu P.I.S.D.. În mod natural apare întrebarea:

- *Există grupuri mixte, reduse, nescindabile, cu P.I.S.D.*?

Răspunsul la această întrebare este afirmativ. Prezentăm, aici, un exemplu de astfel de grup, justificând (totodată!) şi afirmaţia de la (1.2.3.5):

Exemplu: Fie,

$$G=\prod_{p\in P} Z_p ,$$

unde **P** este mulţimea tuturor numerelor prime. Atunci, deoarece fiecare summand direct al lui G este total invariant şi are C.P.I.S.D., conform lui (1.1.2), şi G are această proprietate. Partea de torsiune a lui G este:

$$T(G)=\bigoplus_{p\in P} \mathbf{Z}_p,$$

care nu este sumand direct în G (vezi [42, p. 186]); deci, G este un grup mixt, redus, nescindabil, cu C.P.I.S.D..

În încheierea acestei secţiuni prezentăm o condiţie suficientă pentru „*scindabilitatea*” unui grup mixt cu P.I.S.D..

Teorema 2.1.5.6: *Fie A un grup mixt redus cu proprietatea că A/T(A) nu este divizibil şi B un grup redus, fără-torsiune. Dacă grupul*:

$$G=A\oplus B$$

are proprietatea că G⊕G are P.I.S.D., atunci A are P.I.S.D. şi este scindabil.

***Demonstraţie*:** Dacă G este un grup ca şi în enunţ, atunci, conform cu (1.1.1), G, A şi B au (fiecare) P.I.S.D.. Fie T partea de torsiune a lui A. Din ipoteză şi (1.2.3.8) rezultă că T⊕T are P.I.S.D.; deci, conform lui (2.1.2.2), rezultă că fiecare p-componentă a lui T este un p-grup elementar. Dacă T are un număr finit de p-componente, atunci T este mărginit şi este sumand direct în A, conform lui [41, 27.5], şi, în acest caz, demonstraţia este gata. Presupunem, acum, că există o mulţime infinită de numere prime P_0 astfel încât, pentru orice $p\in P_0$, p-componenta T_p a lui T este nenulă. Alegem un astfel de $p\in P_0$ şi un $q\in \mathbf{P}\setminus P_0$ pentru care $qB\subset B$ (aşa ceva există, deoarece B este p-divizibil, pentru orice $p\in P_0$ - vezi (1.1.6)b)). Atunci:

$$A=T_p\oplus C,$$

iar:

$$G=T_p\oplus H,$$

unde:

$$H=B\oplus C.$$

Notăm cu T_p^* subgrupul lui T care este izomorf cu T/T_p. De asemenea, considerăm grupul:

$$S=qB\oplus T_p^*.$$

Atunci, pentru orice $b\in B$, obţinem că ordinul clasei $b+S$, în grupul factor H/S, este q. Rezultă că q-componenta lui H/S este nenulă. Presupunem că există un $c\in H$ astfel încât:

$$o(c+S)=q.$$

Atunci:

$$q\cdot c=q\cdot b+t,$$

unde $b\in B$ şi $t\in T$. Deoarece există un $m\in \mathbf{N}$, $m\geq 2$, astfel încât:

$$m\cdot t=0,$$

rezultă că $\langle b\rangle\cap\langle c\rangle\neq\emptyset$, ceea ce este în contradicţie cu faptul că:

$$B\cap C=0.$$

Aşadar q-componenta lui H/S, notată cu $(H/S)_q$ este izomorfă cu un q-grup elementar K, iar q-componenta lui $(C+S)/S$ este nulă. Deci,

$$H/S\cong K\oplus L,$$

unde:

$$L\cong(C+S)/S.$$

În $(C+S)/S$ toate clasele nenule sunt de forma $c+S$, unde $c\in C$ este un element fără - torsiune. Pe de altă parte, conform ipotezei şi lui (1.1.6)b), $(C+S)/S$ este p-divizibil, pentru orice $p\in P_0$, dar nu este divizibil. Rezultă că există monomorfisme de la $(C+S)/S$ la C. Dacă f_q este înmulţirea cu q în $K\oplus L$, atunci, pentru orice monomorfism:

$$g : qL \to C,$$

obţinem următoarea aplicaţie compusă, notată cu f:

$$H \to H/T_p^* \to H/S \to K\oplus L \xrightarrow{f_p} qL \xrightarrow{g} C.$$

Atunci f este un endomorfism al lui H, al cărui nucleu este $B\oplus T_p^*$. Deoarece $H\oplus H$ are P.I.S.D., conform lui (1.2.1.3), $B\oplus T_p^*$ este un sumand direct în H. Atunci:

$$T=T_p\oplus T_p^*$$

este un sumand direct în A şi A este scindabil. □

Observaţia 2.1.5.7: *În (2.1.5.6) condiţia ca A/T(A) să nu fie divizibil este esenţială.*

***Demonstraţie*:** Într-adevăr dacă A/T(A) este divizibil, atunci $(C+S)/S$ poate fi divizibil, caz în care de la $(C+S)/S$ la C nu există nici un monomorfism, iar teorema nu are loc - vezi [8, Propoziţia 3.1].

2.2. ALTE CARACTERIZĂRI ALE GRUPURILOR ABELIENE CU P.I.S.D.

În acest subcapitol vom prezenta alte caracterizări, decât cele redate până acum, ale grupurilor abeliene cu P.I.S.D.. Vom prezenta aici:

- *condiţii necesare*,

respectiv:

- *condiţii echivalente cu această proprietate*,
- *un studiu al inelului endomorfismelor şi al grupului automorfismelor unui grup cu P.I.S.D.*,

precum şi,

- *alte rezultate referitoare la aceste grupuri*.

Notaţiile utilizate în acest subcapitol sunt cele clasice:

- $r(G)$, pentru rangul grupului G,
- $r_0(G)$, pentru rangul fără-torsiune al grupului G,
- $r_p(G)$, pentru p-rangul grupului G, unde p este un număr prim.

2.2.1. Cazul general

Începem această secţiune cu o condiţie necesară pentru grupurile cu P.I.S.D.. Pentru aceasta, însă, avem nevoie de următoarele noţiuni:

Definiţie: *([41, §9]) Fie A un subgrup al grupului G. Un subgrup B, al lui G, se numeşte A-înalt în G dacă este un subgrup maximal cu proprietatea că*:

$B \cap A=0.$

Definiţie: *([41, §9]) Un subgrup A al grupului G se numeşte sumand direct absolut (al lui G) dacă, pentru orice subgrup B, al lui G, care este A-înalt în G*,

$G=A \oplus B.$

Sumanzii direcţi absoluţi ai unui grup G au fost studiaţi de Fuchs în [38]; aici el a demonstrat următoarea teoremă:

Teorema 2.2.1.1: *Un subgrup A al unui grup G este un sumand direct absolut, în G, dacă şi numai dacă A este divizibil sau G/A este un grup de torsiune, a cărui p-componentă este anulată de p^k, oricând $A \setminus pA$ conţine un element de ordin p^k.* □

Acum putem demonstra condiţia amintită mai sus.

Teorema 2.2.1.2: *Dacă grupul G are P.I.S.D., atunci intersecţia oricăror doi sumanzi direcţi absoluţi, ai lui G, este tot un sumand direct absolut (în G).*

***Demonstraţie*:** Fie T şi S doi sumanzi direcţi absoluţi, ai lui G. Vom arăta că dacă T şi S satisfac la condiţiile de la (2.2.1.1), atunci şi $T \cap S$ satisface la aceleaşi condiţii. Deci presupunem că:

$G=T\oplus T'=S\oplus S'$.

Conform ipotezei, $T\cap S$ este un sumand direct în S şi în T; fie:

$S=(T\cap S)\oplus S''$ şi $T=(T\cap S)\oplus T''$. (∗)

Conform cu (2.2.1.1), distingem două cazuri.

Cazul 1: Dacă unul din sumanzii T sau S este divizibil, atunci, conform relaţiilor (∗) şi lui [41, §20.(E)], $T\cap S$ este divizibil. Deci, în acest caz, $T\cap S$ este un sumand direct absolut al lui G.

Cazul 2: Dacă T şi S nu sunt grupuri divizibile, atunci, conform lui (2.2.1.1), G/T şi G/S sunt grupuri de torsiune. Deci, pentru orice $g\in G$, există un m şi un $n\in \mathbf{N}^*$ astfel încât $mg\in T$ şi $ng\in S$. Atunci $[m,n]g\in T\cap S$; aici [m,n] notează cel mai mic multiplu comun al numerelor m şi n. Rezultă că $G/(T\cap S)$ este (tot) un grup de torsiune. Fie:

$$G/(T\cap S)=\bigoplus_{p\in P}(G/(T\cap S))_p$$

descompunerea directă a lui $G/T\cap S$ în p-componentele sale, conform cu [41, 8.4]. Presupunem că există un $x\in(T\cap S)\setminus p(T\cap S)$ astfel încât:

$p^kx=0$.

Atunci $x\in T\setminus pT$ şi $x\in S\setminus pS$ şi:

$p^kx=0$.

Conform ipotezei, obţinem că:

$p^k(G/T)_p=T$ şi $p^k(G/S)_p=S$. (∗∗)

Dacă $g+T\cap S\in(G/(T\cap S))_p$. atunci există un $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât $p^ng\in T\cap S$. Atunci $p^ng\in T$ şi $p^ng\in S$; deci $g+T\in(G/T)_p$ şi $g+S\in(G/S)_p$. Conform relaţiilor (∗∗), $p^kg\in T$ şi $p^kg\in S$; deci $p^kg\in T\cap S$, adică:

$p^k(g+T\cap S)=T\cap S$.

Rezultă că:

$p^k(G/(T\cap S))_p=T\cap S$.

Am demonstrat, astfel, că, dacă există în $(T\cap S)\setminus p(T\cap S)$ un element de ordin p^k, atunci p-componenta lui $G/(T\cap S)$ este anulată de p^k. Aşadar, conform lui (2.2.1.1), şi în acest caz $T\cap S$ este un sumand direct absolut al lui G şi teorema este complet demonstrată. □

Fie G un grup abelian. Notăm cu S_G, respectiv cu S_G^a mulţimea sumanzilor direcţi, respectiv a sumanzilor direcţi absoluţi ai lui G. Atunci, din (2.2.1.2), folosind proprietăţile intersecţiei, obţinem:

Corolarul 2.2.1.3: *Dacă grupul G are P.I.S.D., atunci ($S_G^a,\cap$) este un subsemigrup cu unitate al semigrupului comutativ ($S_G,\cap$).* □

Acum vom prezenta alte două condiţii necesare şi suficiente pentru ca un subgrup B, al unui grup G, să fie sumand direct în G, dacă G are o anumită proprietate.

Definiţie: *([41, §31]) Fie G un grup abelian şi B un subgrup al lui G. Atunci B se numeşte subgrup „neat" dacă, pentru orice număr prim p, B/pB este sumand direct în G/pB.*

Teorema 2.2.1.4: *Fie G un grup de rang finit, cu proprietatea că subgrupurile „neat", ale lui G, coincid cu sumanzii săi direcţi. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente, pentru un subgrup B al lui G:*

1) *B este sumand direct în G;*
2) *Pentru orice număr prim p,*

$$r_p(G)=r_p(B)+r_p(G/B);$$

3) *Există un subgrup C, al lui G, care este B-înalt în G astfel încât, pentru orice număr prim p, $p(G)\subseteq p(B)+C$.*

***Demonstraţie*: 1)** implică **2)** Presupunem că are loc afirmaţia 1). Dacă B este sumand direct în G, atunci, conform cu [23, 2.2.5]:

$$G\cong B\oplus G/B \qquad \text{şi} \qquad r(G)=r(B)+r(G/B).$$

Atunci:

$$r_0(G)+\sum_{p\in P} r_p(G)=r_0(B)+\sum_{p\in P} r_p(B)+r_0(G/B)+\sum_{p\in P} r_p(G/B).$$

Dar, conform cu [23, §2.2.(c)]:

$$r_0(G)=r_0(B)+r_0(G/B). \qquad (*)$$

Rezultă că:

$$\sum_{p\in P} r_p(G)=\sum_{p\in P} r_p(B)+\sum_{p\in P} r_p(G/B).$$

Pentru orice număr prim p,

$$r_p(G)=r(G_p)=r(S(G_p))=\dim_{Z(p)}G[p],$$

(vezi [23, p. 53]), iar dacă:

$$G=B\oplus C,$$

atunci:

$$G[p]=B[p]\oplus C[p],$$

vezi (2.3.2.1). Rezultă că:

$$\dim_{Z(p)}G[p]=\dim_{Z(p)}B[p]+\dim_{Z(p)}(G/B)[p],$$

adică:

$$r_p(G)=r_p(B)+r_p(G/B).$$

Deci are loc afirmaţia 2).

2) implică **1)** Dacă are loc egalitatea de la punctul 2), atunci însumând după toate valorile lui p şi considerând relaţia (*), care are loc pentru orice subgrup B, al lui G, obţinem că:

r(G)=r(B)+r(G/B).

Rezultă că B este un subgroup „*neat*” şi, conform ipotezei şi lui [41, §31], B este un sumand direct în G. Aşadar, are loc afirmaţia de la punctul 1).

1) implică **3)** Dacă B este sumand direct în G, atunci există C - un subgrup B-înalt în G astfel încât:

$G=B\oplus C$,

şi, pentru orice număr prim p,

$pG=pB+pC\subseteq pB+C$.

3) implică **1)** Dacă are loc 3), atunci, conform cu [23, Consecinţa lui 2.3.1], B este sumand direct în G; deci are loc 1). Acum demonstraţia este completă. □

Aplicând (2.2.1.4) la grupuri abeliene cu P.I.S.D., obţinem:

Corolarul 2.2.1.5: *Pentru orice grup abelian G, care satisface la condiţiile de la (2.2.1.4), următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1. *G are P.I.S.D.*;
2. *Pentru orice doi sumanzi direcţi T şi S, ai lui G, şi, pentru orice număr prim p*,

   $r_p(G)=r_p(T\cap S)+r_p(G/(T\cap S))$;
3. *Pentru orice doi sumanzi direcţi T şi S, ai lui G, există un subgrup V, al lui G, care este $T\cap S$-înalt în G astfel încât, pentru orice număr prim p, are loc incluziunea:*

   $pG\subseteq p(T\cap S)+V$. □

În continuarea acestei secţiuni vom prezenta două caracterizări ale grupurilor abeliene cu P.I.S.D., folosind grupuri de extensii.

Teorema 2.2.1.6: *Pentru un grup abelian G, următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1. *G are P.I.S.D.*;
2. *Pentru orice descompunere directă a lui G, de forma*:

   $G=B\oplus C$

   şi orice morfism:

   $\beta : B \to C$,

   aplicaţia indusă:

   $\beta^* : Ext(B,A) \to Ext(Im\beta,A)$

   este monomorfism, pentru orice grup abelian A.

***Demonstraţie*: 1)** implică **2)** Fie:

$G=B\oplus C$

un grup cu P.I.S.D. şi:

$\beta : B \to C$

un morfism de grupuri. Atunci, conform cu (1.2.1.3), şirul (E):

$0 \to \ker\beta \to B \to \mathrm{Im}\beta \to 0$

este exact scindabil. (Desigur că (E) este un element din Ext(Imβ,kerβ).) Atunci, pentru orice grup abelian A, din [41, 51.3] obţinem următorul şir exact:

$0 \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Im}\beta,A) \to \mathrm{Hom}(B,A) \to \mathrm{Hom}(\ker\beta,A) \xrightarrow{E^*}$

$\mathrm{Ext}(\mathrm{Im}\beta,A) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Ext}(B,A) \to \mathrm{Ext}(\ker\beta,A) \to 0.$

Deoarece extensia (E) este scindabilă, conform cu [41, 51.1], pentru orice:

$\eta : \ker\beta \to A,$ $E^*(\eta)=\eta E\in \mathrm{Ext}(\mathrm{Im}\beta,A)$

este o extensie scindabilă. Rezultă că:

$\mathrm{Im}E^*=0=\ker\beta^*$

şi, astfel, β^* este monomorfism; deci are loc afirmaţia 2).

2) implică **1)** Presupunem ca are loc afirmaţia 2) şi considerăm cele două şiruri exacte prezentate mai sus. Dacă β^* este monomorfism, atunci:

$\ker\beta^*=0=\mathrm{Im}E^*,$

adică, pentru orice:

$\eta : \ker\beta \to A,$ $E^*(\eta)=\eta E\in \mathrm{Ext}(\mathrm{Im}\beta,A)$

este o extensie scindabilă, oricare ar fi grupul A. Dacă:

$A=\ker\beta$ şi $\eta=1_{\ker\beta},$

atunci obţinem că (E) este o extensie scindabilă şi, conform cu (1.2.4.1), G are P.I.S.D.; deci are loc afirmaţia 1). □

Prezentăm acum duala lui (2.2.1.6):

Teorema 2.2.1.7: *Fie G un grup abelian.*

1) *Dacă G este un grup oarecare (nu neaparat cu P.I.S.D.), atunci pentru orice B şi C - sumanzi direcţi în G, cu $B\subseteq C$, şi orice monomorfism:*

   $\alpha : B \to C,$

   aplicaţia indusă:

   $\alpha_* : Ext(A,B) \to Ext(A,C)$

   este (tot) un monomorfism, pentru orice grup abelian A.

2) *Dacă pentru orice C - sumand direct în G, orice B - subgrup al lui C şi orice monomorfism:*

   $\alpha : B \to C,$

   aplicaţia indusă:

   $\alpha_* : Ext/A,B) \to Ext(A,C)$

   este (tot) un monomorfism, pentru orice grup abelian A, atunci G are P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** **1)** Fie B şi C doi sumanzi direcţi ai lui G şi:

$\alpha : B \to C$

un monomorfism. Atunci:

$\alpha(B)\cong B$

este un sumand direct în C şi (E):

$0 \to B \xrightarrow{\alpha} C \to C/B \to 0$

este un şir exact scindabil. Atunci, din [41, 51.3] obţinem următorul şir exact:

$0 \to Hom(A,B) \to Hom(A,C) \to Hom(A,C/B) \xrightarrow{E_*}$

$Ext(A,B) \xrightarrow{\alpha_*} Ext(A,C) \to Ext(A,C/B) \to 0,$

pentru orice grup abelian A. Dacă:

$\gamma : A \to C/B$

este un morfism de grupuri, atunci, conform cu [41, 51.2]:

$E\gamma=E_*(\gamma)\in Ext(A,B)$

este o extensie scindabilă. Aşadar:

$ImE_*=ker\alpha_*=0$

şi, astfel, α_* este un monomorfism. (Se observă că această implicaţie este adevărată întotdeauna; condiţia ca G să aibă P.I.S.D. nu a fost folosită nicăieri.)

2) Considerăm cele două şiruri exacte de la punctul 1). Dacă α_* este un monomorfism, atunci:

$ImE_*=ker\alpha_*=0.$

Deci, pentru orice grup A şi orice morfism de grupuri:

$\gamma : A \to C/B,$ $E\gamma=E_*(\gamma)\in Ext(A,B)$

este o extensie scindabilă. Dacă:

$A=C/B$ şi $\gamma=1_{C/B},$

atunci (E) este o extensie scindabilă, adică B este un sumand direct în C. Fie H un alt sumand direct al lui G şi fie:

$L=H\cap C.$

Dacă:

$\alpha : L \to C$

este monomorfismul de incluziune, din cele demonstrate până aici, rezultă că L este un sumand direct în C, deci şi în G. Rezultă că G are P.I.S.D.. □

Încheiem această secţiune cu o caracterizare a grupurilor cu P.I.S.D. folosind produsul de torsiune. Reamintim acest concept.

Definiţie: *([41, §62]) Fiind date grupurile (abeliene) A şi C, prin produsul lor de torsiune, notat Tor(A,C), înţelegem grupul generat de toate tripletele de forma* $(a,m,c)\in A\times \mathbf{N}^*\times C$, *cu*:

$ma=mc=0,$

şi care satisfac următoarele relaţii de definiţie:

$(a_1+a_2,m,c)=(a_1,m,c)+(a_2,m,c)$, *dacă* $ma_1=ma_2=mc=0$;

$(a,m,c_1+c_2)=(a,m,c_1)+(a,m,c_2)$, *dacă* $ma=mc_1=mc_2=0$;

$(a,mn,c)=(na,m,c)$, *dacă* $mna=mc=0$;

$(a,mn,c)=(a,m,nc)$, *dacă* $ma=mnc=0$.

Avem nevoie de următorul rezultat tehnic:

Lema 2.2.1.8: *Fie A şi C două grupuri abeliene. Atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Dacă B este un sumand direct în A, atunci Tor(B,C) este izomorf cu un sumand direct în Tor(A,C), iar dacă D este un sumand direct în C, atunci Tor(A,D) este izomorf cu un sumand direct în Tor(A,C).*

2) *Dacă H este un sumand direct în Tor(A,C), atunci există B - sumand direct în A şi există D - sumand direct în C astfel încât*:

$H=Tor(B,D)$.

***Demonstraţie*:** **1)** Enunţul rezultă din [41, §62.(E)] şi din faptul că:

$Tor(A,C)\cong Tor(C,A)$,

conform cu [41, §62, p. 264].

2) Fie H un sumand direct în Tor(A,C) şi fie:

$B=\{a\in A \mid$ există un $m\in \mathbf{N}^*$ şi există un $c\in C$ astfel încât $(a,m,c)\in H\}$,

iar,

$D=\{c\in C \mid$ există un $m\in \mathbf{N}^*$ şi există un $a\in A$ astfel încât $(a,m,c)\in H\}$.

Atunci se verifică foarte uşor că B şi D sunt subgrupuri ale lui A. În mulţimea sumanzilor direcţi ai lui A există un element K, care este minimal cu proprietatea că $B\subset K$, iar în mulţimea sumanzilor direcţi ai lui C există un element L, care este minimal cu proprietatea că $D\subset L$. Atunci, conform celor arătate la punctul 1) şi lui [41, §62.(E)], Tor(K,L) este un sumand direct în Tor(A,C) şi este minimal cu proprietatea că îl conţine pe H. Rezultă că:

$Tor(K,L)=H$,

caz în care:

$K=B$ şi $L=D$. □

Acum putem prezenta acea caracterizare de care am amintit mai sus.

Teorema 2.2.1.9: *Fie A şi G două grupuri abeliene. Atunci ele au (fiecare) P.I.S.D. dacă şi numai dacă Tor(G,A) şi Tor(A,G) au (fiecare) P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Fie A şi G două grupuri cu P.I.S.D. şi fie U şi V doi sumanzi direcţi în Tor(G,A). Atunci, conform lui (2.2.1.8)2), există G_1 şi G_2 - sumanzi direcţi în G şi există A_1 şi A_2 - sumanzi direcţi în A astfel încât:

$U=Tor(G_1,A_1)$ şi $V=Tor(G_2,A_2)$.

Rezultă că:

$U \cap V = \{(a,m,c) \in Tor(G,A) \mid a \in G_1 \cap G_2$, iar $c \in A_1 \cap A_2\}$.

Conform ipotezei şi lui [41, §62.(E)], $U \cap V$ este (izomorf cu) un sumand direct în Tor(G,A) şi Tor(G,A) are P.I.S.D.. Deoarece:

$Tor(G,A) \cong Tor(A,G)$,

rezultă că şi Tor(A,G) are P.I.S.D..

Reciproc, fie G_1 şi G_2 - sumanzi direcţi în G şi A_1 şi A_2 - sumanzi direcţi în A. Atunci, conform lui (2.2.1.8)1):

$U = Tor(G_1,A_1)$, $V = Tor(G_2,A_2)$

şi $U \cap V$ sunt sumanzi direcţi în Tor(G,A). Dar:

$U \cap V = Tor(G_1 \cap G_2, A_1 \cap A_2)$.

Din (2.2.1.8)2) rezultă că $G_1 \cap G_2$ este un sumand direct în G, iar $A_1 \cap A_2$ este un sumand direct în A; deci grupurile G şi, respectiv A, au P.I.S.D.. □

Considerând în (2.2.1.9) pe A ca fiind un grup idecompozabil, obţinem:

Corolarul 2.2.1.10: *Grupul G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă, pentru orice grup idecompozabil A, Tor(G,A) şi Tor(A,G) au (fiecare) P.I.S.D..* □

2.2.2. Grupuri de torsiune

p-grupurile cu P.I.S.D. au o serie de proprietăţi elementare, exprimate în Propoziţia 2.2.2.1. Reamintim definiţiile noţiunilor care intervin aici:

Definiţii: 1) *([42, §83]) Un p-grup G se numeşte cu prezentare simplă, dacă este generat de o mulţime de elemente*:

$X = \{x_i\}_{i \in I}$,

care satisfac numai relaţii de definiţie de forma:

$p^m x_i = 0$ *sau* $p^m x_i = x_j$,

pentru $i \neq j$ *şi* $m \in \mathbf{N}^*$.

2) *([42, §79]) Un subgrup H al unui p-grup G se numeşte subgrup „nice", dacă, pentru orice ordinal* σ*, are loc egalitatea*:

$p^\sigma(G/H) = (p^\sigma G + H)/H$.

3) *([42, §81]) Un p-grup G spunem că are un sistem „nice", dacă G are un sistem* $\mathcal{H}$ *de subgrupuri „nice", care satisface la relaţiile*:

(a) $0 \in \mathcal{H}$;

(b) *dacă* $\{H_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{H}$, *atunci* $\sum_{i \in I} H_i \in \mathcal{H}$;

(c) *pentru un $K\in\mathcal{H}$ şi o mulţime numărabilă X a lui G, există un $L\in\mathcal{H}$ astfel încât: $[<K,X>\leq L$ şi $|L/K|\leq\chi_0]$.*

4) *([42, §81]) Un p-grup G spunem că admite o serie de compoziţie „nice”, dacă există un şir bine-ordonat, strict crescător, de subgrupuri de forma:*

$$0=H_0<H_1<\ldots<H_\lambda<\ldots<H_\mu=G,$$

care satisface la următoarele condiţii:

(a) *$H_0=0$ şi $H_\mu=G$,*

(b) *fiecare H_λ este un subgrup nice în G,*

(c) *$|H_{\lambda+1}:H_\lambda|=p$, pentru orice $\lambda<\mu$,*

(d) *$H_\lambda=\bigcup_{\tau<\lambda}H_\tau$, dacă λ este un ordinal limită.*

5) *([42, §80]) Un subgrup H, al unui p-grup G, se numeşte izotip dacă, pentru orice ordinal σ,*

$$p^\sigma H=H\cap p^\sigma G.$$

6) *([42, §80]) Un subgrup H al unui p-grup G se numeşte balansat (în G) dacă H este şi „nice” şi izotip.*

7) *([42, §80]) Un şir exact de p-grupuri:*

$$0\to H\to G\to K\to 0$$

se numeşte balansat-exact dacă H este un subgrup balansat în G.

8) *([42, §81]) Un p-grup G se numeşte (p-)grup Prüfer generalizat, dacă G este un p-grup redus, neseparabil.*

9) *([42, §82]) Un p-grup G se numeşte total proiectiv dacă, pentru orice ordinal σ şi, pentru orice grup A,*

$$p^\sigma Ext(G/p^\sigma G,A)=0.$$

10) *([42, §65]) Un p-grup G se numeşte total tranzitiv dacă, pentru orice două elemente a, $b\in G$, cu $H(a)\leq H(b)$, există $f\in End(G)$ astfel încât:*

$$f(a)=b.$$

(Aici H(x) notează „matricea înălţime” a elementului x.)

Prezentăm acum:

Propoziţia 2.2.2.1: 1) *Dacă G este un p-grup cu P.I.S.D., atunci G este cu prezentare simplă.*

2) *Dacă G este un p-grup redus cu P.I.S.D., atunci au loc următoarele afirmaţii:*

a) *G are un sistem „nice”;*

b) *G are o serie de compoziţie „nice”;*

c) *G este proiectiv relativ la şirurile balansat-exacte de p-grupuri;*

d) *G este un sumand direct al unei sume directe de grupuri generalizate Prüfer;*

e) *G este total proiectiv*;

f) *G este total tranzitiv*;

g) *Pentru orice şir crescător de ordinale şi simboluri ∞,*

$$u=(\alpha_0,\ldots,\alpha_n,\ldots),$$

G(u) şi G/G(u) sunt total proiective.

***Demonstraţie*: 1)** Dacă G este un p-grup cu P.I.S.D., atunci, conform lui (2.1.2.2), sau există un $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$G=\mathbf{Z}(p^n),$$

sau există un cardinal m_p astfel încât:

$$G=(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))\oplus C_p,$$

unde:

$C_p=0$ sau $C_p=\mathbf{Z}(p^\infty)$.

Deoarece $\mathbf{Z}(p^n)$, cu $n\in\mathbf{N}^*$, şi $\mathbf{Z}(p^\infty)$ sunt p-grupuri cu prezentare simplă, şi o sumă directă de p-grupuri cu prezentare simplă este tot un p-grup cu prezentare simplă (vezi [42, §83]), rezultă că G este şi el (tot) un astfel de grup.

2)a) Conform cu [42, 83.2], orice p-grup cu prezentare simplă are un sistem „*nice*”.

b), c), d) e) Afirmaţiile de la aceste puncte sunt echivalente cu afirmaţia de la punctul a), conform cu [42, 81.9 şi 82.3].

f) Conform cu [42, 81.4], orice p-grup total proiectiv este total tranzitiv.

g) Conform cu [42, §83], orice p-grup total proiectiv are proprietatea din enunţ. □

Următorul rezultat realizează o altă legătură între p-grupurile de torsiune, cu P.I.S.D., şi produsul de torsiune.

Propoziţia 2.2.2.2: *Fie G un p-grup cu P.I.S.D. şi E un subgrup pur al lui G astfel încât* $\mathbf{Z}(p^\infty)\subseteq E$. *Atunci, pentru orice grup A, Tor(E,A) este un subgrup balansat al lui Tor(G,A).*

***Demonstraţie*:** Considerăm grupurile G şi E ca şi în enunţ. Conform lui (2.1.2.2), G este suma directă dintre un grup divizibil şi un grup mărginit. Atunci, orice subgrup al lui G, deci şi E, este un subgrup „*nice*”, căci egalitatea din [42, 79.2] se verifică imediat (vezi [42, §79, p. 75]). Deoarece E este pur în G şi $\mathbf{Z}(p^\infty)\subseteq E$, atunci:

$$pE=E\cap pG=E\cap\mathbf{Z}(p^\infty)=\mathbf{Z}(p^\infty)$$

şi:

$$pG+E=\mathbf{Z}(p^\infty)+E=E.$$

Deci:

$$(G/E)^1=0$$

şi, conform cu [42, §80.(G)], E este un subgrup izotip în G. Rezultă că E este un subgrup balansat în G. Desigur că în obţinerea rezultatului din enunţ este interesant

doar cazul în care A este un p-grup; celelalte cazuri fiind triviale, conform cu [41, §62.(D) şi (F)]. Atunci, din [41, 63.2] şi [41, §62, p. 75], rezultă că Tor(E,A) este un subgrup „*nice*” în Tor(G,A). Demonstrăm, acum, că Tor(E,A) este izotip în Tor(G,A). Egalitatea:

$$p^{\sigma}Tor(E,A)=Tor(E,A)\cap p^{\sigma}Tor(G,A)$$

devine, conform lui [42, 64.2]:

$$Tor(p^{\sigma}E,p^{\sigma}A)=Tor(E,A)\cap Tor(p^{\sigma}G,p^{\sigma}A),$$

căci:

$$p^{\sigma}E=E\cap p^{\sigma}G.$$

Rezultă că Tor(E,A) este balansat în Tor(G,A). □

Deoarece studiul modulelor (grupurilor abeliene) cu P.I.S.D. se face via inelul endomorfismelor acestora, în continuarea acestei secţiuni, pentru un grup de torsiune G, cu P.I.S.D., vom determina inelul End(G) al endomorfismelor şi grupul Aut(G) al automorfismelor lui G.

Mai întâi avem următoarea observaţie:

Observaţia 2.2.2.3: *Dacă,*

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i$$

este o descompunere directă a grupului G astfel încât, pentru orice $i\in I$, G_i *este un sumand direct total invariant în G, atunci inelul End(G) al endomorfismelor sale este izomorf cu produsul direct al inelelor endomorfismelor grupurilor* G_i*, adică*:

$$End(G)\cong\prod_{i\in I} End(G_i). \quad (17)$$

Demonstraţie: Fie f un endomorfism (oarecare) al lui G. Atunci, conform ipotezei, pentru orice $i\in I$, $f(G_i)\subseteq G_i$. Pentru orice $i\in I$, notăm:

$$f|_{G_i}=f_i.$$

Atunci aplicaţia:

$$f\mapsto (f_i)_{i\in I}$$

este izomorfismul căutat în enunţ. □

Lema 2.2.2.4: *Dacă G este un p-grup cu P.I.S.D., atunci*:

$$End(G)\cong G, \quad (18)$$

sau:

$$End(G)\cong Q_p^*, \quad (19)$$

sau:

$$End(G)\cong M^{(f)}_{m_p\times m_p}(\boldsymbol{Z}(p))\oplus R_p(\cong(\prod_{m_p^2} Z(p))\oplus R_p, \text{ dacă } m_p \text{ este finit}), \quad (20)$$

unde:

- $m_p \in \mathbf{N}^*$ *sau* $m_p = \infty$;
- $M^{(f)}_{m_p \times m_p}$ *(**Z**(p)) este inelul matricilor pătratice de ordin* m_p*, cu elemente din **Z**(p) şi a căror coloane au un număr finit de elemente nenule*;
- $R_p=0$ *sau* $R_p \cong (\prod_{m_p} Z(p)) \oplus Q_p^*$;
- Q_p^* *fiind completatul în topologia p-adică al inelului* $\mathbf{Q}_p$ *al întregilor p-adici.*

***Demonstraţie*:** Fie G un p-grup cu P.I.S.D.. Conform cu (2.1.2.2), distingem următoarele cazuri:

Cazul 1: Există un $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$G=\mathbf{Z}(p^n).$$

Atunci, conform cu [41, §43]:

$$End(G) \cong G;$$

deci, are loc relaţia (18) din enunţ.

Cazul 2: Dacă:

$$G=\mathbf{Z}(p^\infty),$$

atunci, conform cu [42, §106], are loc izomorfismul din relaţia (19).

Cazul 3: Există un cardinal m_p astfel încât:

$$G=(\oplus_{m_p} \mathbf{Z}(p)) \oplus C_p,$$

unde:

$C_p=0$ sau $C_p=\mathbf{Z}(p^\infty)$.

Fie:

$$B_p=\oplus_{m_p} \mathbf{Z}(p).$$

Atunci, conform cu [41, 43.1, 43.2 şi §43.(A).(iii)]:

$$\begin{aligned} End(G) &= Hom(G,G)=Hom(B_p \oplus C_p, B_p \oplus C_p) \\ &\cong Hom(B_p,B_p) \oplus Hom(B_p,C_p) \oplus Hom(C_p,B_p) \oplus Hom(C_p,C_p) \\ &= End(B_p) \oplus Hom(B_p,C_p) \oplus End(C_p). \end{aligned} \qquad (*)$$

Dar, conform cu [42, 106.1], inelul $End(B_p)$ este izomorf cu inelul $M^{(f)}_{m_p \times m_p}(\mathbf{Z}(p))$ al matricilor pătratice de ordin m_p, cu elemente din **Z**(p) şi a căror coloane au un număr finit de elemente nenule, deci a căror sumă de pe fiecare coloană, a unei astfel de matrici, există în topologia finită a lui $End(B_p)$. Dacă:

$$R_p=Hom(B_p,C_p) \oplus End(C_p),$$

atunci:

$R_p=0$, dacă $C_p=0$,

iar dacă:

$C_p=\mathbf{Z}(p^\infty)$,

atunci:

$$R_p=\mathrm{Hom}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p),\mathbf{Z}(p^\infty))\oplus\mathrm{End}(\mathbf{Z}(p^\infty))$$
$$\cong(\prod_{m_p}\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}(p),\mathbf{Z}(p^\infty)))\oplus Q_p^*$$
$$\cong(\prod_{m_p}Z(p^\infty)[p])\oplus Q_p^*\cong(\prod_{m_p}Z(p))\oplus Q_p^*,$$

conform cu [41, §43] şi [42, §106]. Înlocuind pe End(B_p) şi R_p în relaţia (∗), obţinem primul izomorfism din relaţia (20). Al doilea izomorfism din (20) poate fi obţinut astfel:

$$\mathrm{End}(B_p)=\mathrm{Hom}(B_p,B_p)=\mathrm{Hom}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p),\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))$$
$$\cong\prod_{m_p}\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}(p),\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))\cong\prod_{m_p}\prod_{m_p}\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}(p),\mathbf{Z}(p))$$
$$\cong\prod_{m_p}\prod_{m_p}\mathrm{End}(\mathbf{Z}(p))\cong\prod_{m_p^2}Z(p).\ \square$$

Trecem acum la grupurile de torsiune.

Teorema 2.2.2.5: *Dacă G este un grup de torsiune cu P.I.S.D., atunci*:

$$End(G)\cong(\prod_{p\in P_0}G_p)\oplus(\prod_{p\in P_1}M^{(f)}_{m_p\times m_p}\,\mathbf{Z}(p))\oplus(\prod_{p\in P_1}R_p)$$
$$(\cong(\prod_{p\in P_0}G_p)\oplus(\prod_{p\in P_1}\prod_{m_p^2}Z(p))\oplus(\prod_{p\in P_1}R_p),\ \text{dacă } m_p \text{ este finit}),\qquad(21)$$

unde:

- *P_0 şi P_1 sunt submulţimi disjuncte ale mulţimii **P** a tuturor numerelor prime*;
- *pentru fiecare $p\in P_0$, există un $n_p\in\mathbf{N}^*$, $n_p\geq2$, astfel încât*:

  $G_p=\mathbf{Z}(p^{n_p})$;
- *pentru orice $p\in P_1$, $M^{(f)}_{m_p\times m_p}(\mathbf{Z}(p))$ şi R_p au aceeaşi semnificaţie ca şi în (2.2.2.3).*

***Demonstraţie*:** Fie G un grup de torsiune cu P.I.S.D.. Conform cu (2.1.2.3), G este de forma:

$$G=(\bigoplus_{p\in P_0}G_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}B_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}C_p),\qquad(9)$$

unde:

- P_0 şi P_1 sunt submulţimi disjuncte ale mulţimii **P** a tuturor numerelor prime;
- pentru orice $p\in P_0$, G_p este un p-grup redus, idecompozabil, neelementar;

- pentru orice $p\in P_1$,

$$pB_p=0, \qquad C_p=0 \qquad \text{sau} \qquad C_p=\mathbf{Z}(p^\infty).$$

Pentru orice $p\in P_1$, notăm cu:

$$D_p=B_p\oplus C_p;$$

deci:

$$G=(\bigoplus_{p\in P_0} G_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_1} D_p).$$

Deoarece, conform cu [40, §2], sumanzii direcţi $\bigoplus_{p\in P_0} G_p$ şi $\bigoplus_{p\in P_1} D_p$ sunt total invarianţi în G, din (2.2.2.3) şi (2.2.2.4), obţinem:

$$\begin{aligned}\mathrm{End}(G)&\cong\mathrm{End}(\bigoplus_{p\in P_0} G_p)\oplus\mathrm{End}(\bigoplus_{p\in P_1} D_p)\\ &\cong(\prod_{p\in P_0}\mathrm{End}\,G_p)\oplus(\prod_{p\in P_1}\mathrm{End}\,(B_p\oplus C_p))\\ &\cong(\prod_{p\in P_0} G_p)\oplus(\prod_{p\in P_1} M^{(f)}_{m_p\times m_p}\,\mathbf{Z}(p))\oplus(\prod_{p\in P_1} R_p)\\ &\cong(\prod_{p\in P_0} G_p)\oplus(\prod_{p\in P_1}\prod_{m_p^2} Z(p))\oplus(\prod_{p\in P_1} R_p),\end{aligned}$$

unde:

$$R_p=\mathrm{Hom}(B_p,C_p)\oplus\mathrm{End}(C_p),$$

ca şi în (2.2.2.4). □

Determinăm acum grupul automorfismelor unui grup de torsiune cu P.I.S.D.. Începem cu p-grupurile cu această proprietate:

Lema 2.2.2.6: *Dacă G este un p-grup cu P.I.S.D., atunci*:

$$Aut(G)\cong U(\mathbf{Z}(p^n)), \tag{22}$$

sau:

$$Aut(G)\cong\mathbf{Z}(p-1)\times J_p, \tag{23}$$

sau:

$$Aut(G)\cong U(M^{(f)}_{m_p\times m_p}(\mathbf{Z}(p)))\oplus U(R_p)$$

$$(\cong(\prod_{m_p^2} Z(p-1))\oplus U(R_p),\ \text{dacă } m_p \text{ este finit}), \tag{24}$$

unde:

- *$n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq2$, iar $U(\mathbf{Z}(p^n))$ este grupul multiplicativ al elementelor inversabile ale inelului $(\mathbf{Z}(p^n),+,\cdot)$*;

- *m_p şi $M^{(f)}_{m_p \times m_p}$ (**Z**(p)) au aceeaşi semnificaţie ca şi în (2.2.2.3), iar U($M^{(f)}_{m_p \times m_p}$ (**Z**(p)) este grupul multiplicativ al unităţilor inelului ($M^{(f)}_{m_p \times m_p}$ (**Z**(p),+,·);*
- *R_p are aceeaşi semnificaţie ca şi în (2.2.2.3), iar:*

$$U(R_p)=0 \qquad \text{sau} \qquad U(R_p)\cong (\prod_{m_p} Z(p-1))\oplus(\mathbf{Z}(p-1)\times J_p,$$

J_p fiind grupul aditiv al lui Q_p^*.

***Demonstraţie*:** Relaţiile (22), (23) şi (24) le obţinem din relaţiile (18), (19) şi, respectiv (20), ţinând cont de faptul că un automorfism al unui grup G este un element inversabil al inelului End(G), iar, conform cu [42, §128]:

$$U(\mathbf{Z}(p))\cong\mathbf{Z}(p\text{-}1) \qquad \text{şi} \qquad U(\mathrm{Q}_p^*)\cong\mathbf{Z}(p\text{-}1)\times \mathrm{J_p},$$

unde J_p este grupul aditiv al lui Q_p^*. □

Făcând un raţionament analog celui de la (2.2.2.6), dar utilizând (2.2.2.5), se poate demonstra următorul rezultat:

Teorema 2.2.2.7: *Dacă G este un grup de torsiune, cu P.I.S.D., atunci:*

$$Aut(G)\cong(\prod_{p\in P_0} U(G_p))\oplus(\prod_{p\in P_1} U(M^{(f)}_{m_p\times m_p})\,\mathbf{Z}(p))\oplus(\prod_{p\in P_1} U(R_p))$$

$$(\cong(\prod_{p\in P_0} U(G_p))\oplus(\prod_{p\in P_1}\prod_{m_p^2} Z(p-1))\oplus$$

$$(\prod_{p\in P\setminus P_0} U(R_p)),\ \text{dacă } n_p \text{ este finit}), \qquad (25)$$

unde toate notaţiile făcute au aceeaşi semnificaţie ca şi în (2.2.2.5) şi, respectiv (2.2.2.6). □

Trebuie să remarcăm următorul fapt:

Observaţia 2.2.2.8: *Relaţiile (21), respectiv (25), conţin şi cazurile în care G este un grup divizibil, de torsiune, cu P.I.S.D., când:*

$$End(G)\cong\prod_{p\in P_1} Q_p^*, \qquad (26)$$

iar:

$$Aut(G)\cong\prod_{p\in P_1}[Z(p-1)\times J_p], \qquad (27)$$

unde P_1 este o submulţime de numere prime; celelalte notaţii fiind precizate mai sus. □

2.2.3. Grupuri fără-torsiune

În (2.1.3.1) am arătat că orice grup divizibil şi fără-torsiune are P.I.S.D.. Folosind acest rezultat vom demonstra, în această secţiune, câteva rezultate referitoare la grupurile fără-torsiune cu această proprietate.

Teorema 2.2.3.1: *Fie G un grup fără-torsiune cu proprietatea că, pentru orice două grupuri B şi C şi orice epimorfism*:

$\beta : B \to C$,

aplicaţia indusă:

$\beta^* : Ext(C,G) \to Ext(B,G)$

este monomorfism. Atunci G are P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Fie G un grup ca şi în enunţ, iar B şi C două grupuri arbitrare şi:

$\beta : B \to C$

un epimorfism. Atunci şirul (E):

$0 \to \ker\beta \to B \xrightarrow{\beta} C \to 0$

este exact. Aplicând (iarăşi) [41, 51.3], obţinem următorul şir exact:

$0 \to Hom(C,G) \to Hom(B,G) \to Hom(\ker\beta,G) \xrightarrow{E^*}$

$Ext(C,G) \xrightarrow{\beta^*} Ext(B,G) \to Ext(\ker\beta,G) \to 0.$

Deoarece β^* este monomorfism, rezultă că:

$ImE^*=0$;

adică, pentru orice:

$\eta : \ker\beta \to G$, $E^*(\eta)=\eta E$

este o extensie scindabilă. Considerând acum pe:

B=D

- învelitorarea divizibilă a lui G,

C=D/G, $\beta=\pi_G$

- proiecţia canonică a lui D pe D/G şi:

$\eta=1_G$,

obţinem, din cele demonstrate mai sus, că:

$1_G E \cong E$

şi care, acum, devine:

$0 \to G \to D \xrightarrow{\pi_G} D/G \to 0$,

care este o extensie scindabilă, adică G este un sumand direct în D. Atunci [41, §20.(E)] arată că G este divizibil. Acum ipoteza şi (2.1.3.1) completează demonstraţia. □

Observaţia 2.2.3.2: *Din demonstraţia de mai sus rezultă că reciproca lui (2.2.3.1) are loc pentru orice grup divizibil.* □

În continuare vom vedea ce condiţii trebuie să satisfacă grupurile G şi H pentru ca grupul Hom(G,H) să aibă P.I.S.D..

Propoziţia 2.2.3.3: 1) *Fie G şi H două grupuri abeliene. În oricare din următoarele situaţii, Hom(G,H) are P.I.S.D.*:

a) *G este fără-torsiune şi divizibil*;

b) *H este fără-torsiune şi divizibil*;

c) *G este fără-torsiune şi idecompozabil, H este divizibil şi G⊕H are P.I.S.D.*;

d) *G este fără-torsiune, neredus, cu P.I.S.D. şi H este fără-torsiune, de rang unu*;

e) *G este fără-torsiune, de rang unu şi H este fără-torsiune, neredus, cu P.I.S.D.*.

2) *Dacă G şi H sunt grupuri fără-torsiune de rang unu, cu $t(G)\leq t(H)$, atunci, pentru orice mulţime de indici I, grupul*:

$$K=\oplus_I Hom(G,H)$$

are P.I.S.D.. În particular, grupul:

$$E=\oplus_I End(G)$$

are P.I.S.D., oricare ar fi G un grup fără-torsiune, de rang unu.

***Demonstraţie*: 1)a)** Dacă G este fără-torsiune şi divizibil, atunci, pentru orice grup H, Hom(G,H) este, şi el, fără-torsiune şi divizibil, conform cu [41, §43.(G)]. Acum aplicăm (2.1.3.1).

b) Dacă H este fără-torsiune şi divizibil, atunci, pentru orice grup G, Hom(G,H) este, şi el, fără-torsiune şi divizibil, conform cu [41, §43.(D)]. Iarăşi aplicăm (2.1.3.1).

c) Dacă G⊕H are P.I.S.D., atunci, conform cu (1.2.1.3), rezultă că, pentru orice $\alpha\in Hom(G,H)$, $\ker\alpha$ este un sumand direct în G. Cum G este idecompozabil, înseamnă că orice morfism:

$$\alpha : G \rightarrow H$$

este sau nul, sau injectiv. Fie:

$$\beta : G \rightarrow H$$

un morfism nenul, pentru care există un $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$n\cdot\beta=0.$$

Atunci, pentru orice $g\in G$,

$$n\cdot\beta(g)=\beta(n\cdot g)=0.$$

Deci:

$$n\cdot g=0,$$

căci β este injectiv. Deoarece G este fără-torsiune, rezultă că:

$$n=0$$

- contradicţie cu alegerea lui n. Aşadar, Hom(G,H) este fără-torsiune. Deoarece grupul H este divizibil, rezultă din [41, §43, p. 183] că Hom(G,H) este divizibil. Aşadar Hom(G,H) este fără-torsiune şi divizibil. Acum (2.1.3.1) completează demonstraţia.

d) Fie G un grup fără-torsiune, neredus, cu P.I.S.D. şi H un grup fără-torsiune, de rang unu. Atunci, conform cu (2.1.4.2),

$$G=D\oplus B,$$

cu D - divizibil şi B - redus, complet decompozabil, de rang finit. Deci există un $n\in \mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$B=\oplus_n C,$$

unde C este un grup redus, fără-torsiune, de rang unu. Rezultă, conform lui [41, 43.1 şi 43.2] că:

$$Hom(G,H)=Hom(D\oplus B,H)\cong Hom(D,H)\oplus Hom(B,H)$$
$$=Hom(D,H)\oplus Hom(\oplus_n C,H)\cong Hom(D,H)\oplus(\oplus_n Hom(C,H)).$$

Grupul Hom(D,H) are P.I.S.D., conform punctului a). Din [42, 85.4] rezultă că Hom(C,H) este sau 0, dacă $t(C)>t(H)$ sau t(C) şi t(H) sunt incomparabile, sau este un grup fără-torsiune, de rang unu şi de tip $t(H) : t(C)$, dacă $t(C)\leq t(H)$. Dacă:

$$Hom(C,H)=0,$$

atunci:

$$Hom(G,H)=Hom(D,H)$$

şi demonstraţia este gata în acest caz. Dacă $Hom(C,H)\neq 0$, atunci $\oplus_n Hom(C,H)$ este sau un grup divizibil şi fără-torsiune, sau un grup redus, omogen, complet decompozabil, de rang finit. În primul caz rezultă că Hom(G,H) este un grup divizibil şi fără-torsiune şi, deci, are P.I.S.D., iar în al doilea caz Hom(B,H) este un grup redus, complet decompozabil, omogen, de rang finit şi care, conform cu (1.1.7), are P.I.S.D.. Dacă H este redus, atunci:

$$Hom(D,H)=0$$

şi nu mai avem ce demonstra. Presupunem, deci, că H este divizibil. Atunci Hom(B,H) este, conform punctului b), un grup divizibil şi fără-torsiune; rezultă că şi Hom(G,H) este tot un astfel de grup. Acum demonstraţia este completă.

e) Demonstraţia de la acest punct este analoagă cu cea de la punctul d).

2) Dacă G şi H sunt ca şi în enunţ, atunci Hom(G,H) este, conform cu [42, 85.4], un grup fără-torsiune, de rang unu. Acum putem aplica (1.2.5.5). □

Din (2.2.3.3)1)b) şi [41, §43] rezultă:

Corolarul 2.2.3.4: *Pentru orice grup abelian G şi orice* $m\in \mathbf{N}^*$, *grupul*:

$$Hom(G,\oplus_m \mathbf{Q})\cong\prod_{r_0(G)}[\oplus_m Q] \text{ are P.I.S.D.. } \square$$

Pentru orice grup abelian G, grupul caracterelor lui G este:

CarG=Hom(G,**Q**/**Z**).

Din (2.2.3.3)1)a) rezultă că dacă G este un grup fără-torsiune şi divizibil, atunci CarG are P.I.S.D.. Teorema următoare îmbunătăţeşte acest rezultat.

Teorema 2.2.3.5: *Dacă G este un grup fără-torsiune, complet decompozabil, cu P.I.S.D., atunci CarG are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Fie G un grup fără-torsiune cu P.I.S.D.. Din (2.1.4.3) rezultă că avem trei cazuri:

Cazul 1: Dacă G este neredus, atunci el este de forma:

$$G=(\oplus_m \mathbf{Q})\oplus(\oplus_n C)$$

unde:

- m este un cardinal oarecare,
- n este un număr natural,

iar,

- C este un grup redus, de rang unu.

În acest caz,

$$\begin{aligned}\mathrm{Car}G&=\mathrm{Hom}(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})=\mathrm{Hom}((\oplus_m \mathbf{Q})\oplus(\oplus_n C),\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\\&\cong\mathrm{Hom}((\oplus_m \mathbf{Q}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\oplus\mathrm{Hom}((\oplus_n C),\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\\&\cong\prod_m \mathrm{Hom}(\mathbf{Q},\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\oplus\prod_n \mathrm{Hom}(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}).\end{aligned}$$

Conform cu [41, §43], grupul Hom(**Q**,**Q**/**Z**) este divizibil şi fără-torsiune. Atunci şi $\prod_m \mathrm{Hom}(\mathbf{Q},\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ este tot un astfel de grup, conform cu [41, §20.(E)]. Deoarece grupul C este fără-torsiune şi **Q**/**Z** este divizibil, rezultă că Hom(C,**Q**/**Z**) este un grup divizibil (vezi tot [41, §43, p. 183]). Pe de altă parte, pentru orice p - număr prim, subgrupul p-bazic al lui C este nul (vezi (2.3.5.7)) şi, conform cu [41, 47.1], $\mathrm{Hom}(C,\mathbf{Z}(p^\infty))$ este un grup divizibil şi fără-torsiune. Dar,

$$\mathrm{Hom}(C,\mathbf{Z}(p^\infty))\subseteq\mathrm{Hom}(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

iar:

$$\mathrm{Hom}(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})=\mathrm{Hom}(C,\bigoplus_{p\in P}\mathbf{Z}(p^\infty))$$

se scufundă izomorf în $\prod_{p\in P}\mathrm{Hom}(C,\mathbf{Z}(p^\infty))$, care este un grup divizibil şi fără-torsiune.

Rezultă că, implicit, Hom(C,**Q**/**Z**) este şi el un grup divizibil şi fără-torsiune. Aşadar, în acest caz, CarG este un grup divizibil şi fără-torsiune şi din (2.1.3.1) rezultă că el are P.I.S.D..

Cazul 2: Grupul G este redus şi este de forma:

$$G=\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{m_i} G_i),$$

unde, pentru orice $i\in I$, m_i este un cardinal nenul, iar G_i este un grup (redus) de rang unu şi, pentru orice $i_1, i_2\in I$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt incomparabile. În acest caz,

$$CarG=Hom(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})=Hom((\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{m_i} G_i)),\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\cong\prod_{i\in I}\prod_{m_i} Hom(G_i,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Din cele demonstrate la Cazul 1, rezultă că, pentru orice $i\in I$, $Hom(G_i,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ este un grup divizibil şi fără-torsiune. Deci, şi în acest caz, CarG este tot un grup divizibil şi fără-torsiune. Iarăşi aplicăm (2.1.3.1) şi obţinem că grupul CarG are P.I.S.D..

Cazul 3: Grupul G este redus şi este de forma:

$$G=(\oplus_n B)\oplus(\bigoplus_{i\in I} G_i),$$

unde:

- n este un număr natural

şi,

- B este un grup (redus) de rang unu şi de tip ν,
- pentru orice $i\in I$, G_i este un grup (redus) de rang unu şi de tip μ_i, cu $\nu<\mu_i$ şi, pentru orice $i_1, i_2\in I$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt tipuri incomparabile.

Atunci:

$$CarG=Hom((\oplus_n B)\oplus(\bigoplus_{i\in I} G_i)),\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$
$$\cong(\oplus_n Hom(B,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))\oplus\prod_{i\in I} Hom(G_i,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Şi în acest caz, $Hom(B,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ şi, pentru orice $i\in I$, $Hom(G_i,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ sunt divizibile şi fără-torsiune. În continuare judecăm ca şi în cazul precedent. □

În continuarea acestei secţiuni, pentru un grup G, fără-torsiune, complet decompozabil şi cu P.I.S.D., determinăm inelul End(G) şi grupul Aut(G) al endomorfismelor, respectiv automorfismelor lui G.

Teorema 2.2.3.6: *Dacă G este un grup fără-torsiune, complet decompozabil, cu P.I.S.D., atunci*:

$$EndG)\cong\prod_m[\oplus_m Q]\oplus\prod_n[\oplus_m Q]\oplus[\oplus_n(\oplus_n End(C))], \quad (28)$$

unde:

- *m este un cardinal oarecare, iar n este un număr natural*,
- *C este un grup redus, de rang unu*;

sau:

$$End(G)\cong\prod_{i\in I} M^{*}_{m_i}\ , \tag{29}$$

unde:

- *pentru orice* $i\in I$, m_i *este un cardinal oarecare*,

iar:

- $M^{*}_{m_i}$ *este inelul matricilor pătratice de ordin* m_i *şi ale căror elemente sunt morfisme*:

  $$f^{i}_{j} : G_j \to G_i,$$

  cu proprietatea că famila $\{f^{i}_{j}\}_{i\in I}$ *este aproape peste tot trivială (vezi relaţia (14) şi Secţiunea 3.3.1)*;

sau:

$$End(G)\cong[\oplus_n(\oplus_n EndB)]\oplus[\oplus_n Hom(B,(\bigoplus_{i\in I} G_i))]\oplus\prod_{i\in I} End\,(G_i), \tag{30}$$

unde:

- *n este un număr natural*

şi,

- *B este un grup (redus) de rang unu şi de tip* ν,
- *pentru orice* $i\in I$, G_i *este un grup (redus) de rang unu şi de tip* μ_i, *cu* $\nu<\mu_i$,
- *pentru orice* $i_1, i_2\in I$, $t(G_{i_1})$ *şi* $t(G_{i_2})$ *sunt tipuri incomparabile.*

***Demonstraţie*:** Fie G un grup ca şi în enunţ. Ca şi în (2.2.3.5), conform cu (2.1.4.3), distingem trei cazuri:

<u>Cazul 1:</u> Dacă G este neredus, atunci el este de forma:

$$G=(\oplus_m \mathbf{Q})\oplus(\oplus_n C),$$

unde:

- m este un cardinal oarecare,
- n este un număr natural,

iar,

- C este un grup redus, de rang unu.

Notând:

$$D=\oplus_m \mathbf{Q} \qquad \text{şi} \qquad B=\oplus_n C,$$

în acest caz obţinem, conform cu [41, 43.1, 43.2 şi §43, (A).(iii)]:

$$\begin{aligned}End(G)&=Hom(G,G)=Hom(D\oplus B,D\oplus B)\\ &\cong Hom(D,D)\oplus Hom(D,B)\oplus Hom(B,D)\oplus Hom(B,B)\\ &=End(D)\oplus Hom(B,D)\oplus End(B).\end{aligned} \tag{$*$}$$

Dar, conform cu [41, §43], avem:

$$\mathrm{End}(D)=\mathrm{Hom}((\oplus_m \mathbf{Q}),(\oplus_m \mathbf{Q}))\cong\prod_m[\oplus_m Q],$$

$$\mathrm{Hom}(B,D)=\mathrm{Hom}((\oplus_n C),(\oplus_m \mathbf{Q}))\cong\prod_n \mathrm{Hom}(C,\oplus_m \mathbf{Q})\cong\prod_n[\oplus_m Q],$$

iar:

$$\mathrm{End}(B)=\mathrm{Hom}(\oplus_n C,\oplus_n C)=\oplus_n[\oplus_n \mathrm{End}(C)].$$

Înlocuind aceste rezultate în relaţia (∗), obţinem izomorfismul din relaţia (28).

Cazul 2: Grupul G este redus şi este de forma:

$$G=\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{m_i} G_i),$$

unde, pentru orice $i\in I$, m_i este un cardinal oarecare, iar G_i este un grup (redus) de rang unu şi, pentru orice $i_1, i_2\in I$, $i_1\neq i_2$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt incomparabile. În acest caz, notând, pentru fiecare $i\in I$, cu:

$$G_i^*=\oplus_{m_i} G_i,$$

obţinem că:

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i^*$$

şi, pentru orice $i_1, i_2\in I$, $i_1\neq i_2$, $G_{i_1}^*$ şi $G_{i_2}^*$ sunt total invariante. Atunci, conform lui (2.2.2.3), avem că:

$$\mathrm{End}(G)\cong\prod_{i\in I}\mathrm{End}(G_i^*).$$

Dar, conform lui [42, 106.1],

$$\mathrm{End}(G_i^*)\cong M_{m_i}^*,$$

unde $M_{m_i}^*$ este inelul prezentat în enunţ. Deci am obţinut izomorfismul din relaţia (29).

Cazul 3: Grupul G este redus şi este de forma:

$$G=(\oplus_n B)\oplus(\bigoplus_{i\in I} G_i),$$

unde:

- n este un număr natural

şi,

- B este un grup (redus) de rang unu şi de tip ν,
- pentru orice $i\in I$, G_i este un grup (redus) de rang unu şi de tip μ_i, cu $\nu<\mu_i$ şi, pentru orice $i_1, i_2\in I$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt tipuri incomparabile.

Atunci:

$$End(G)=Hom((\oplus_n B)\oplus(\bigoplus_{i\in I} G_i),(\oplus_n B)\oplus(\bigoplus_{i\in I} G_i))$$

$$\cong Hom((\oplus_n B),(\oplus_n B))\oplus Hom((\oplus_n B),\bigoplus_{i\in I} G_i)\oplus$$

$$Hom(\bigoplus_{i\in I} G_i,(\oplus_n B))\oplus Hom(\bigoplus_{i\in I} G_i,\bigoplus_{i\in I} G_i)$$

$$=End((\oplus_n B))\oplus Hom((\oplus_n B),\bigoplus_{i\in I} G_i)\oplus$$

$$Hom(\bigoplus_{i\in I} G_i,(\oplus_n B))\oplus End(\bigoplus_{i\in I} G_i). \qquad (**)$$

Dar:

$$End((\oplus_n B))\cong\oplus_n(\oplus_n EndB);$$

$$Hom((\oplus_n B),\bigoplus_{i\in I} G_i)\cong(\oplus_n Hom(B,(\bigoplus_{i\in I} G_i));$$

$$Hom(\bigoplus_{i\in I} G_i,(\oplus_n B))=0,$$

deoarece:

$$Hom(\bigoplus_{i\in I} G_i,(\oplus_n B))\cong\prod_{i\in I} Hom(G_i,(\oplus_n B))=\prod_{i\in I}(\oplus_n Hom(G_i, B))=0,$$

căci, conform ipotezei, pentru orice $i\in I$, $t(G_i)>t(B)$ şi, deci,

$$Hom(G_i,B)=0.$$

Dar,

$$End(\bigoplus_{i\in I} G_i)\cong\prod_{i\in I} End(G_i),$$

deoarece, pentru orice $i\in I$, G_i este total invariant în G. Înlocuind aceste rezultate în relaţia (**) obţinem izomorfismul din relaţia (30) şi teorema este complet demonstrată. □

Făcând un raţinament analog celui de la (2.2.2.7), dar utilizând (2.2.3.6), obţinem:

Teorema 2.2.3.7: *Dacă G este un grup fără-torsiune, complet decompozabil, cu P.I.S.D., atunci*:

$$AutG)\cong\prod_m[\oplus_m Q^*]\oplus\prod_n[\oplus_m Q^*]\oplus[\oplus_n(\oplus_n Aut(C))]$$

$$\cong\prod_m[\oplus_m(Z(2)\times\bigtimes_{\chi_0} Z)]\oplus$$

$$\prod_n[\oplus_m(Z(2)\times\bigtimes_{\chi_0} Z)]\oplus[\oplus_n(\oplus_n Aut(C))], \qquad (31)$$

unde:

- m *este un cardinal oarecare*,

iar,

- n *este un număr natural*;
- C *este sumandul direct redus, de rang unu, al lui* G;

sau:

$$Aut(G) \cong \prod_{i \in I} U(M^{*}_{m_i}), \qquad (32)$$

unde:

- *pentru orice* $i \in I$, m_i *este un cardinal oarecare*,

iar,

- $U(M^{*}_{m_i})$ *este grupul elementelor inversabile ale inelului matricilor pătratice de ordin* m_i *şi ale căror elemente sunt morfisme*:

  $f^{i}_{j} : G_j \to G_i$,

  cu proprietatea că familia $\{f^{i}_{j}\}_{i \in I}$ *este aproape peste tot trivială (vezi (2.2.3.6))*;

sau:

$$Aut(G) \cong [\oplus_n(\oplus_n AutB)] \oplus \prod_{i \in I} Aut(G_i), \qquad (33)$$

unde:

- n *este un număr natural*

şi,

- B *este un grup (redus) de rang unu şi de tip* ν,
- *pentru orice* $i \in I$, G_i *este un grup (redus) de rang unu şi de tip* μ_i, *cu* $\nu < \mu_i$,
- *pentru orice* $i_1, i_2 \in I$, $t(G_{i_1})$ *şi* $t(G_{i_2})$ *sunt tipuri incomparabile.* □

Trebuie să remarcăm că:

Observaţia 2.2.3.8: *Relaţiile (28) şi (31) conţin şi cazul în care*:

$n=0$,

caz în care G este un grup divizibil şi fără-torsiune, cu P.I.S.D., când:

$$End(G) \cong \prod_{m} [\oplus_m Q] \cong M^{(f)}_{m}(Q), \qquad (34)$$

iar,

$$Aut(G) \cong U(M^{(f)}_{m}(\mathbf{Q})) \cong \prod_{m} [\oplus_m Q^{*}] \cong \prod_{m} [\oplus_m (Z(2) \times \bigtimes_{\chi_0} Z)], \qquad (35)$$

unde:

- m *este un cardinal oarecare*,

- $M_m^{(f)}$ ***(Q)*** *este inelul matricilor pătratice de ordinul m, cu elemente din **Q** şi ale căror coloane au un număr finit de elemente nenule*,

iar,

- *U(*$M_m^{(f)}$***(Q)****) este grupul multiplicativ al elementelor inversabile ale acestui inel.*

***Demonstraţie*:** Relaţiile din enunţ se obţin din relaţiile (28) şi, respectiv (31), precum şi din cele demonstrate în [41, §43] şi [42, §106, §113 şi §127]. □

Încheiem această secţiune cu alte două condiţii necesare pentru ca un grup fără-torsiune să aibă P.I.S.D..

Propoziţia 2.2.3.9: *Fie G un grup fără-torsiune. În oricare din următoarele cazuri, G are P.I.S.D.*:

1) *Grupul G are următoarele proprietăţi*:

a) *dacă G este neredus, atunci partea redusă a lui G este de rang finit*,

şi,

b) *dacă G este o imagine endomorfică a unui grup H, atunci H conţine un sumand direct izomorf cu G.*

2) *Grupul G are următoarele proprietăţi*:

a) *dacă G este neredus, atunci partea redusă a grupului G este de rang finit*,

şi,

b) *există un număr prim p astfel încât subgrupul p-bazic B al lui G este o imagine endomorfică a lui G şi G/B este divizibil.*

***Demonstraţie*:** **1)** Dacă G satisface la condiţia b) din enunţ, atunci, conform cu [49, Teorema 1],

$G=D\oplus F$,

unde D este un grup divizibil, iar F este un grup liber. Grupurile D şi F, din descompunerea lui G, au P.I.S.D., datorită lui (2.1.3.1), respectiv (2.1.1.2). Dacă:

$D=0$,

nu mai avem ce demonstra, iar dacă $D\neq 0$, atunci, conform condiţiei a), F este de rang finit. Acum (2.1.4.2) completează demonstraţia.

2) Fie G un grup fără-torsiune care satisface la condiţiile din enunţ şi:

$B=B_0\oplus B_1\oplus\ldots\oplus B_n\oplus\ldots$

subgrupul său p-bazic, unde:

$B_0=\oplus\mathbf{Z}$

şi, pentru orice n=1, 2, …,

$B_n=\oplus\mathbf{Z}(p^n)$.

Conform ipotezei, rezultă că:

$B=\oplus\mathbf{Z}$,

deci B este un grup liber. Dacă $f\in End(G)$ şi:

$f(G)=B$,

atunci:

$G/kerf\cong B$.

Deoarece B este un grup liber, rezultă, conform lui [41, 14.4], că şirul:

$0 \rightarrow kerf \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 0$

este exact scindabil. Deci:

$G=kerf\oplus B=D\oplus C\oplus B$,

unde D este subgrupul maximal divizibil al lui G şi C este un subgrup redus (al lui G). Cum G/B este divizibil, rezultă că:

$C=0$.

Deci:

$G=D\oplus B$,

cu D - divizibil şi B - liber. Acum raţionăm ca şi la punctul 1). □

2.2.4. Grupuri mixte

Folosind relaţiile (16) - (35), problema determinării lui End(G) şi, respectiv Aut(G), pentru un grup mixt G, neredus, cu P.I.S.D., devine imediată. Obţinem astfel:

Teorema 2.2.4.1: *Dacă G este un grup mixt, neredus, cu P.I.S.D., atunci*:

$$End(G)\cong\prod_m[\oplus_m Q]\oplus\prod_n[\oplus_m Q]\oplus[\oplus_n(\oplus_n End(C))]\oplus \prod_{p\in P_0}G_p\oplus\prod_{p\in P_1}M^{(f)}_{m_p\times m_p}\mathbf{Z}(p)$$

$$\cong\prod_m[\oplus_m Q]\oplus\prod_n[\oplus_m Q]\oplus[\oplus_n(\oplus_n End(C))]\oplus \prod_{p\in P_0}G_p\oplus\prod_{p\in P_1}\prod_{m_p^2}Z(p), \qquad (36)$$

(dacă m_p este finit), iar:

$$Aut(G)\cong\prod_m[\oplus_m Q^*]\oplus\prod_n[\oplus_m Q^*]\oplus[\oplus_n(\oplus_n Aut(C))] \oplus\prod_{p\in P_0}U(G_p)\oplus\prod_{p\in P_1}U(M^{(f)}_{m_p\times m_p})\mathbf{Z}(p)$$

$$\cong\prod_m[\oplus_m(Z(2)\times\bigtimes_{\chi_0}Z)]\oplus\prod_n[\oplus_m(Z(2)\times\bigtimes_{\chi_0}Z)]\oplus[\oplus_n(\oplus_n Aut(C))]\oplus$$

$$\prod_{p\in P_0} U(G_p) \oplus \prod_{p\in P_1} U(M^{(f)}_{m_p\times m_p})\,\boldsymbol{Z}(p), \tag{37}$$

unde (absolut) toate notaţiile au aceleaşi semnificaţii ca şi în (2.2.2.5), (2.2.2.7), (2.2.3.6) şi, respectiv (2.2.3.7). □

Fie G un grup mixt. Rezultatele următoare prezintă condiţii suficiente pentru ca T(G) şi G/T(G) să aibă P.I.S.D., folosind inelul End(G).

Propoziţia 2.2.4.2: *Fie G un grup mixt cu proprietatea că orice imagine epimorfică a lui G este un sumand direct în G.*

- ***1)*** *Dacă T(G) este mărginit, atunci G, T(G) şi G/T(G) au, fiecare, P.I.S.D..*
- ***2)*** *Dacă T(G) nu este mărginit, el poate avea P.I.S.D., G/T(G) are P.I.S.D., iar G poate să nu mai aibă această proprietate.*

***Demonstraţie*:** Fie G un grup mixt, cu proprietatea din enunţ. Din [61, 3.1, 4.2 şi 5.3] rezultă că fiecare p-componentă a lui G este sau un (p-)grup elementar, sau un grup divizibil, iar G/T(G) este divizibil.

1) Dacă T(G) este mărginit, atunci fiecare p-componentă a lui G este un p-grup elementar şi are P.I.S.D., conform cu (2.1.2.1). Rezultă că şi T(G) este tot un grup elementar şi, conform cu (1.1.3), T(G) are P.I.S.D.. Grupul G/T(G) are P.I.S.D., datorită lui (2.1.3.1). Conform ipotezei, G este scindabil, şi cum T(G) şi G/T(G) sunt, în acest caz, total invariante în G, (1.1.2) arată că G are P.I.S.D..

2) Presupunem că T(G) nu este mărginit. Dacă T(G) nu este redus, atunci el are un sumand direct divizibil. Din (2.1.3.5) rezultă că T(G) poate avea P.I.S.D., dacă este de forma $\bigoplus_{p\in P_0} \mathbf{Z}(p^\infty)$, unde P_0 este o submulţime de numere prime. Dar, în acest caz, conform cu (2.1.5.1), G nu mai poate fi mixt, contradicţie cu ipoteza. Dacă T(G) este redus, atunci el are o infinitate de p-componente elementare şi, conform lui (1.1.3), T(G) are P.I.S.D.. Dacă G este scindabil, atunci el are P.I.S.D., iar dacă G nu este scindabil, atunci el poate să nu aibă această proprietate. □

Propoziţia 2.2.4.3: *Fie G un grup abelian. În oricare din următoarele situaţii, T(G) şi G/T(G) au, fiecare, P.I.S.D.*:

- ***1)*** *Dacă G este un grup mixt şi nucleele şi imaginile endomorfismelor lui G sunt subgrupuri pure în G*;
- ***2)*** *Inelul endomorfismelor lui G este regular.*

***Demonstraţie*:** **1)** Dacă G este un grup mixt cu proprietatea din enunţ, atunci, conform cu [71, §5, Propoziţia 3], T(G) este elementar şi G/T(G) este divizibil. Acum (2.1.2.1) şi (2.1.3.1) completează demonstraţia.

2) Presupunem că End(G) este regular. Dacă G nu este redus, atunci, conform cu [42, 112.7], G este scindabil, T(G) este elementar, iar G/T(G) este divizibil. Rezultă

că, în acest caz, G, T(G) şi G/T(G) au, fiecare, P.I.S.D.. Dacă G este de torsiune, atunci:

$$G=T(G)$$

este un grup elementar şi, deci, are P.I.S.D.. În sfârşit, dacă G este redus, atunci, iarăşi, T(G) este elementar, iar G/T(G) este divizibil. □

Corolarul 2.2.4.4: *Orice grup mixt scindabil, ce satisface la condiţiile de la (2.2.4.3)1) are P.I.S.D..* □

În încheiere prezentăm alte două caracterizări ale grupurilor mixte cu P.I.S.D.. Reamintim definiţiile conceptelor care vor interveni aici:

Definiţii: 1) *([41, §38]) Un grup G se numeşte compact algebric dacă G este sumand direct în orice grup care îl conţine ca subgrup pur.*

2) *([41, §41]) Un grup compact algebric, care este minimal cu proprietatea că conţine un grup dat G, ca subgrup pur, se numeşte învelitoarea pur-injectivă a lui G.*

3) *([41, §54]) Un grup G se numeşte de cotorsiune, dacă:*

$$Ext(J,G)=0,$$

pentru orice grup fără-torsiune J.

4) *([41, §58]) Un grup redus, de cotorsiune, care este minimal cu proprietatea că conţine un grup redus (dat) G, se numeşte învelitoarea de cotorsiune a grupului G.*

Teorema 2.2.4.5: *Fie G un grup mixt scindabil, cu P.I.S.D., cu:*

$$T=T(G)$$

şi $\hat{T}$ - completatul lui T în topologia p-adică. Atunci au loc următoarele afirmaţii:

1) *Pentru orice grup divizibil E, $Ext(E,\hat{T})$ este izomorf cu un sumand direct al unui produs direct de grupuri de forma G/p^nG;*
2) *$\hat{T}$ este izomorf cu un sumand direct al unui produs direct de grupuri de forma G/p^nG;*
3) *Dacă B este un sumand direct, fără-torsiune, redus, de rang unu, dintr-o descompunere oarecare a lui G, şi:*

   $$(Ext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},B))_0=0,$$

   atunci învelitoarea pur-injectivă a lui T şi primul subgrup Ulm al învelitorii de cotorsiune a lui T sunt izomorfe cu $(Ext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},G))_0$; deci $(Ext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},G))_0$ este un grup redus, compact algebric. (C_0 notează primul factor Ulm al grupului C.)

***Demonstraţie*: 1)** Dacă G este un grup mixt scindabil, cu P.I.S.D., atunci, conform cu (1.1.6)1),

$$T^1=0.$$

Atunci, din [41, 39.5], obţinem că:

$$0\to T\to \hat{T}\to \hat{T}/T\to 0$$

este un şir exact scindabil. Fie E un grup abelian divizibil. Acum [41, 53.7] arată că următorul şir:

$$0=\mathrm{Hom}(E,\hat{T}) \to \mathrm{Hom}(E,\hat{T}/T) \to \mathrm{Pext}(E,T) \to \mathrm{Pext}(E,\hat{T})=0$$

este exact; ultima egalitate are loc deoarece $\hat{T}$ este un grup compact algebric (vezi [41, 39.1]). Rezultă că:

$$\mathrm{Hom}(E,\hat{T}/T)\cong\mathrm{Pext}(E,T)=(\mathrm{Ext}(E,T))^1.$$

Dar şi următorul şir:

$$0=\mathrm{Hom}(E,\hat{T}) \to \mathrm{Hom}(E,\hat{T}/T) \to \mathrm{Ext}(E,T) \to \mathrm{Ext}(E,\hat{T}) \to \mathrm{Ext}(E,\hat{T}/T)=0$$

este exact (vezi [41, 51.3]); ultima egalitate având loc datorită faptului că $\hat{T}/T$ este divizibil, conform cu [41, 39.5]. Deci:

$$\mathrm{Ext}(E,T)/\mathrm{Hom}(E,\hat{T}/T)\cong\mathrm{Ext}(E,T)/\mathrm{Pext}(E,T)\cong\mathrm{Ext}(E,T)/(\mathrm{Ext}(E,T))^1$$
$$=\mathrm{Ext}(E,T)_0\cong\mathrm{Ext}(E,\hat{T}).$$

Deoarece:

$$G\cong T\oplus G/T$$

(vezi (2.1.5.1)), rezultă că:

$$(\mathrm{Ext}(E,G))_0\cong(\mathrm{Ext}(E,T))_0\oplus(\mathrm{Ext}(E,G/T))_0,$$

conform cu [41, 37.5]. Deci, $\mathrm{Ext}(E,\hat{T})$ este izomorf cu un sumand direct în $(\mathrm{Ext}(E,G))_0$.

(∗) Pe de altă parte, conform cu [41, 30.1], există o sumă directă de grupuri ciclice:

$$X=\bigoplus_{i\in I}<x_i>$$

şi un epimorfism:

$$\eta : X \to E$$

astfel încât $\ker\eta$ este un subgrup pur în X; adică există următorul şir pur-exact:

$$0 \to \ker\eta \to X \to E \to 0.$$

Atunci, din [41, 57.1], rezultă că:

$$(\mathrm{Ext}(X,G))_0=(\mathrm{Ext}(E,G))_0\oplus(\mathrm{Ext}(\ker\eta,G))_0.$$

Dar, atunci, conform cu [41, 52.2, §52.(D) şi 37.5], obţinem că:

$$(\mathrm{Ext}(X,G))_0=(\mathrm{Ext}(\bigoplus_{i\in I}<x_i>,G))_0\cong(\prod_{i\in I}\mathrm{Ext}(<x_i>,G))_0$$
$$\cong(\prod_{p\in P_1}G/p^nG)_0\cong\prod_{p\in P_1}G/p^nG,$$

unde P_1 este o submulţime a mulţimii **P** a tuturor numerelor prime. Deci $(\mathrm{Ext}(E,G))_0$ este izomorf cu un sumand direct al unui produs direct de forma G/p^nG. Conform afirmaţiei (∗), şi $\mathrm{Ext}(E,\hat{T})$ are această proprietate.

2) Se ştie (vezi [41, 56.6]) că:

$\hat{T} \cong (Ext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},T))_0$,

care este izomorf cu un sumand direct al lui $(Ext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},G))_0$, conform lui [41, 57.1]. Deoarece **Q**/**Z** este divizibil, afirmaţia din enunţ rezultă din demonstraţia punctului 1) al acestei teoreme.

3) Fie:

$G=T\oplus D\oplus B$

un grup mixt scindabil, cu P.I.S.D.; aici:

$T=T(G)$,

D este subgrupul maximal divizibil al lui G, iar B este un grup redus, fără-torsiune. Dacă $D\neq 0$, atunci B este un grup complet decompozabil, omogen, de rang finit, iar dacă:

$D=0$,

atunci B poate fi un grup de forma (14) sau de forma (15). Din ipoteză şi din [41, 37.5, 56.6, §52.(B)], rezultă că:

$(Ext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},G))_0=(Ext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},T))_0\cong \hat{T}$

- care este un grup redus, compact algebric (vezi [41, 39.1]). Dacă $\widetilde{T}$ este învelitoarea pur-injectivă a lui T, atunci din [41, 41.9] şi (1.1.6)1) rezultă că:

$\widetilde{T} \cong \hat{T}$. □

Corolarul 2.2.4.6: *Fie G un grup mixt scindabil, cu P.I.S.D. şi B - sumandul său redus, fără-torsiune. Dacă, K este învelitoarea divizibilă, iar A este învelitoarea pur-injectivă, a lui B şi dacă*:

$Hom(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},K/B)\cong Hom(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},A/B)$,

atunci $(Ext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},G))_0$ este un grup redus compact algebric.

Demonstraţie**:** Din [41,52.3] rezultă că:

$Ext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},B)\cong Hom(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},K/B)$.

Dacă A este învelitoarea pur-injectivă a lui B, atunci:

$0 \to B \to A \to A/B \to 0$

este un şir pur-exact, iar următorul şir:

$0=Hom(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},A) \to Hom(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},A/B) \to Pext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},B) \to Pext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},A)=0$

este exact - conform cu [41, 53.7], iar cele două egalităţi se datorează lui [41, §43. (A).(iii)] şi, respectiv lui [41, 41.5]. Rezultă că:

$Pext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},B)\cong Hom(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},A/B)$.

Atunci, conform ipotezei şi lui [41, 53.3], obţinem că:

$$(Ext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},B))_0=(Ext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},B))/Pext(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},B)$$
$$\cong Hom(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},K/B)/Hom(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},A/B)=0.$$

Acum (2.2.4.5) completează demonstraţia. □

2.3. SUBGRUPURI ŞI GRUPURI FACTOR ALE GRUPURILOR ABELIENE CU P.I.S.D.

În (1.1.1) am arătat că dacă un grup abelian G are proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi, atunci orice sumand direct H, al lui G, şi G/H au aceeaşi proprietate. În această secţiune vom prezenta condiţii necesare şi/sau suficiente pentru ca anumite subgrupuri ale unui grup G, cu P.I.S.D., care nu sunt sumanzi direcţi şi grupurile factor corespunzătoare, să aibă P.I.S.D.. Astfel, fiind dat un grup abelian G, cu P.I.S.D., şi m un număr natural nenul, sunt investigate, aici, subgrupurile de tipul:

- $mG=\{m\cdot g \mid g\in G\}$,
- $G[m]=\{g\in G \mid m\cdot g=0\}$,
- $m^{-1}G=\{a\in A \mid m\cdot a\in G\}$ (în acest caz G este un subgrup al unui grup A),
- *F(G)* - subgrupul Frattini al lui G

și,

- B_G - subgrupul p-bazic al lui G, p fiind un număr prim oarecare,

precum şi grupurile factor corespunzătoare.

2.3.1. Subgrupuri de forma mG, m∈N*

Dacă G este un grup abelian şi m este un număr natural nenul, atunci notăm cu: $mG=\{m\cdot g \mid g\in G\}$.

Se poate demonstra, foarte uşor, că mG este un subgrup al grupului G. În această secţiune vom vedea în ce condiţii mG şi G/mG au P.I.S.D., dacă G are această proprietate.

Începem investigaţiile noastre cu următorul rezultat trivial:

Observaţia 2.3.1.1: *Dacă G este un grup elementar, atunci orice subgrup H, al lui G, şi G/H au P.I.S.D.. În particular, pentru orice* $m\in\mathbf{N}^*$*, mG şi G/mG au P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Conform cu [41, §17, p. 89], orice subgrup H al unui grup elementar G, este un sumand direct în G; deci H şi G/H au P.I.S.D.. □

Următorul rezultat pur-tehnic ne va fi util în dezvoltările viitoare.

Lema 2.3.1.2: *Fie G un grup oarecare şi* $m\in\mathbf{N}^*$*,* $m\geq 2$*.*

1) *Dacă H este un sumand direct în G, atunci mH este un sumand direct în mG. Dacă:*

$$G[m]=0,$$

atunci are loc şi reciproca; adică, dacă mH este un sumand direct în mG, atunci H este un sumand direct în G.

2) *Dacă H este un subgrup în mG, atunci există K - subgrup în G astfel încât*:

$H=mK$.

3) *Dacă*:

$G(m]=0$,

atunci, oricare ar fi T şi S două subgrupuri în G,

$mT\cap mS=m(T\cap S)$.

***Demonstraţie*: 1)** Dacă H este un sumand direct în G, atunci:

$G=H\oplus K$,

unde K este un subgrup în G. Deci, oricare ar fi $g\in G$, există, în mod unic, un $h\in H$ şi un $k\in K$ astfel încât:

$g=h+k$.

Rezultă că:

$m\cdot g=m\cdot h+m\cdot k$;

deci $mG\subseteq mH+mK$. Deoarece $mH+mK\subseteq mG$, rezultă că:

$mG=mH+mK$.

Cum:

$mH\cap mK\subseteq H\cap K=0$,

rezultă că:

$mG=mH\oplus mK$.

Acum presupunem că:

$G[m]=0$ şi $mG=mH\oplus mK$,

unde H şi K sunt subgrupuri ale lui G. Atunci oricare ar fi $g\in G$, există, în mod unic, un $h\in H$ şi un $k\in K$ astfel încât:

$m\cdot g=m\cdot h+m\cdot k$.

Deci:

$m\cdot(g-h-k)=0$

şi, astfel:

$g-h-k\in G[m]=0$.

Rezultă că:

$g=h+k$.

Cum g a fost ales arbitrar, rezultă că:

$G=H+K$.

Dacă $x\in H\cap K$, atunci:

$m\cdot x\in mH\cap mK=0$,

adică:

$x\in G[m]=0$.

Rezultă că:

$G=H\oplus K$.

2) Fie H un subgrup oarecare al lui mG şi:

$K=\{g\in G \mid m\cdot g\in H\}$.

Atunci:

$mK=H$.

3) Fie T şi S două subgrupuri ale lui G şi $x\in mT\cap mS$. Atunci:

$x=m\cdot t=m\cdot s$,

cu $t\in T$ şi $s\in S$. Rezultă că:

$m\cdot(t-s)=0$,

adică:

$t-s\in G[m]=0$.

Deci:

$t=s$

şi $x\in m(T\cap S)$. Aşadar $mT\cap mS\subseteq m(T\cap S)$, şi deoarece $m(T\cap S)\subseteq mT\cap mS$, obţinem egalitatea din enunţ. □

Acum putem trece la rezolvarea problemei noastre.

Propoziţia 2.3.1.3: *Fie G un grup abelian, cu*:

$G[m]=0$,

unde $m\in\mathbf{N}^*$, $m\geq 2$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *G are P.I.S.D.*;

2) *mG are P.I.S.D.*.

***Demonstraţie*: 1)** implică **2)** Presupunem că G are P.I.S.D. şi considerăm doi sumanzi direcţi T şi S, ai lui mG. Conform lui (2.3.1.2)2)3), există H şi K - subgrupuri ale lui G astfel încât:

$T=mH$, $S=mK$ şi $T\cap S=mH\cap mK=m(H\cap K)$

este un sumand direct în mG. Deci mG are P.I.S.D..

2) implică **1)** Reciproc, presupunem că mG are P.I.S.D. şi considerăm H şi K doi sumanzi direcţi în G. Atunci, conform cu (2.3.1.2)1),3), mH, mK şi:

$mH\cap mK=m(H\cap K)$

sunt sumanzi direcţi în mG. Acum (2.3.1.2)1) completează demonstraţia. □

Se impune aici o observaţie.

Observaţia 2.3.1.4: *În enunţul lui (2.3.1.3) condiţia*:

$G[m]=0$

este absolut necesară.

***Demonstraţie*:** Vom arăta că dacă p este un număr prim, există grupuri cu proprietatea că $G[p]\neq 0$, pG are P.I.S.D., fără ca G să aibă această proprietate. Într-adevăr, fie:

$$G=\mathbf{Z}(p)\oplus\mathbf{Z}(p^2).$$

Atunci $G[p]\neq 0$ şi, conform cu (1.1.5), acest grup nu are P.I.S.D., dar:

$$pG=p\mathbf{Z}(p^2)\cong\mathbf{Z}(p)$$

are această proprietate. □

Corolarul 2.3.1.5: *Fie G un grup fără-torsiune. Atunci G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă mG are P.I.S.D., pentru orice* $m\in\mathbf{N}^*$.

***Demonstraţie*:** Dacă G este fără-torsiune, atunci, pentru orice $m\in\mathbf{N}^*$,

$$G[m]=0.$$

Acum aplicăm (2.3.1.3). □

Corolarul 2.3.1.6: *Fie G un grup fără-torsiune. Atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Dacă G este liber (sau liber numărabil, sau liber de puterea continuului), atunci, pentru orice* $m\in\mathbf{N}^*$*, mG are P.I.S.D.*;
2) *Dacă G este un W-grup (vezi Secţiunea 2.1.1), sau un subgrup al unui W-grup, sau o sumă directă de W-grupuri, atunci, pentru orice* $m\in\mathbf{N}^*$*, mG are P.I.S.D.*;
3) *Dacă G este complet decompozabil şi omogen, atunci, pentru orice* $m\in\mathbf{N}^*$*, mG are P.I.S.D.*;
4) *Dacă G nu este redus, atunci G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă mB are această proprietate, pentru orice* $m\in\mathbf{N}^*$*, unde B este partea redusă a lui G*;
5) *Dacă G este idecompozabil, de rang finit, cu proprietatea că End(G) este un inel semi-ereditar drept, atunci, pentru orice mulţime de indici I şi pentru orice* $m\in\mathbf{N}^*$*, grupurile* $\oplus_I mG$ *au P.I.S.D.*;
6) *Grupul G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă subgrupurile pure ale lui mG coincid cu sumanzii direcţi ai acestuia, pentru orice* $m\in\mathbf{N}^*$.

***Demonstraţie*:** **1)** Enunţul rezultă din (2.1.1.2) şi (2.3.1.5).

2) Aplicăm (2.1.1.7) şi (2.3.1.5).

3) Conform cu (1.1.7), G are P.I.S.D.. Acum aplicăm (2.3.1.5).

4) Fie:

$$G=D\oplus B,$$

cu D - divizibil şi B - redus. Conform cu (2.1.4.2),

G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă B are această proprietate.

Iarăşi aplicăm (2.3.1.5).

5) Enunţul rezultă din (1.2.6.2), (2.3.1.2)1) şi (2.3.1.5).

6) Subgrupurile pure ale lui mG coincid cu sumanzii direcţi (ai lui mG) dacă şi numai dacă mG are P.I.S.D., conform cu (2.1.4.6). Conform cu (2.3.1.5), aceasta este echivalent cu faptul că G are P.I.S.D.. □

Corolarul 2.3.1.7: *Fie G un p-grup. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *G are P.I.S.D.*;
2) *Pentru orice $m\in\mathbf{N}^*$, mG are P.I.S.D.*.

***Demonstraţie*:** Dacă, pentru orice $m\in\mathbf{N}^*$, mG are P.I.S.D., atunci, considerând pe

$m=1$,

obţinem că G are P.I.S.D..

Reciproc, presupunem că G este un p-grup cu P.I.S.D.. Conform cu (2.1.2.2), distingem trei cazuri.

Cazul 1: Există un $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât:

$G=\mathbf{Z}(p^n)$.

Dacă:

$m=p^i$,

cu $i\geq1$, atunci:

$mG=p^i\mathbf{Z}(p^n)\cong\mathbf{Z}(p^{n-i})$,

dacă $i\leq n-1$, şi:

$mG=0$,

pentru $i\geq n$. Rezultă că, în acest subcaz, mG este idecompozabil şi, deci, mG are P.I.S.D.. Dacă:

$m=p^i\cdot q$,

cu $i\geq0$ şi:

$(p,q)=1$,

atunci:

$mG=(p^i\mathbf{Z}(p^n))\cong q\mathbf{Z}(p^{n-i})=\mathbf{Z}(p^{n-i})$,

dacă $i\leq n-1$, şi:

$mG=0$,

pentru $i\geq n$. În acest subcaz:

$\mathbf{Z}(p^{n-i})[q]=0$.

De fapt, în general, dacă $a, b\in\mathbf{N}^*$ şi:

$(a,b)=1$,

atunci:

$\mathbf{Z}(a)[b]=0$.

Aşadar, în acest caz, mG are P.I.S.D..

Cazul 2: Dacă:

$G=\mathbf{Z}(p^{\infty})$,

atunci, pentru orice $m\in\mathbf{N}^*$,

$mG=G$.

Cazul 3: Există un cardinal m_p astfel încât:

$G=(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))\oplus C_p$,

unde:

$C_p=0$ sau $C_p=\mathbf{Z}(p^{\infty})$.

Dacă există $i\geq 1$ astfel încât p^i divide pe m, atunci:

$mG=C_p$

are P.I.S.D.. Dacă nu există $i\geq 1$ astfel încât p^i să dividă pe m, atunci:

$G[m]=0$

şi (2.3.1.3) completează demonstraţia. □

Corolarul 2.3.1.8: *Fie G un grup de torsiune. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *G are P.I.S.D.*;
2) *Pentru orice $m\in\mathbf{N}^*$, mG are P.I.S.D.*.

***Demonstraţie*:** Ca şi la (2.3.1.7) este suficient să demonstrăm că **1)** implică **2)**. Presupunem, deci, că:

$G=\bigoplus_{p\in P_1} G_p$

este un grup de torsiune cu P.I.S.D., unde P_1 este o mulţime de numere prime şi, pentru orice $p\in P_1$, G_p este un p-grup cu P.I.S.D., conform cu (1.1.3). Atunci:

$mG=\bigoplus_{p\in P_1} mG_p$,

unde, pentru orice $p\in P_1$, mG_p este tot un p-grup cu P.I.S.D., conform cu (2.3.1.7). Acum (1.1.3) completează demonstraţia. □

Şi aici se impune o observaţie.

Observaţia 2.3.1.9: *În (2.3.1.7) şi (2.3.1.8) condiţia „pentru orice" joacă un rol fundamental; dacă acesta ar lipsi, implicaţia „**2)** implică **1)**" s-ar putea să nu mai aibă loc.*

***Demonstraţie*:** Contraexemplu: fie,

$G=\mathbf{Z}(4)\oplus\mathbf{Z}(4)$.

Atunci:

$2G\cong\mathbf{Z}(2)\oplus\mathbf{Z}(2)$

are P.I.S.D., dar G nu are această proprietate, vezi (2.1.2.2). □

Conform lui (2.1.5.2) şi (2.1.5.4), un grup mixt scindabil, cu P.I.S.D., este de forma:

$$G=(\oplus_{m_0}\mathbf{Q})\oplus((\bigoplus_{p\in P_0}\mathbf{Z}(p^{n_p}))\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))\oplus B, \quad (16)$$

unde:

- m_0 este un cardinal oarecare;

iar,

- **Q** este grupul (aditiv) al numerelor raţionale;
- P_0 este o mulţime de numere prime şi, pentru orice $p\in P_0$, n_p este un număr natural nenul;
- P_1 este tot o submulţime a mulţimii **P** a tuturor numerelor prime şi, pentru orice $p\in P_1$, m_p este un cardinal oarecare;
- dacă $D\neq 0$, atunci B este un grup redus, complet decompozabil, omogen, de rang finit, iar dacă:

  $D=0$,

  atunci B este un grup de forma (14) sau de forma (15).

Aplicând (2.3.1.5) şi (2.3.1.8) la un astfel de grup, obţinem:

Corolarul 2.3.1.10: *Fie G un grup de forma (16). Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1. *G are P.I.S.D.*;
2. *Pentru orice $m\in\mathbf{N}^*$, mG are P.I.S.D..* □

Fie:

$$G/mG=\bigoplus_{p|m}(G/mG)_p$$

descompunerea directă a lui G/mG în p-componentele sale, conform cu [41, 8.4]. Din (1.1.3) rezultă că G/mG are P.I.S.D. dacă şi numai dacă, pentru orice p | m, $(G/mG)_p$ este un p-grup cu P.I.S.D.. Astfel avem:

Propoziţia 2.3.1.11: *Fie G un grup abelian cu P.I.S.D. şi m un număr natural (oarecare), $m\geq 2$. În oricare din următoarele cazuri, G/mG are P.I.S.D.*:

1. *G este un p-grup*;
2. $G=\bigoplus_{p\in P_1}G_p$ *este un grup de torsiune, unde P_1 este o mulţime de numere prime şi, pentru orice $p\in P_1$, G_p este un p-grup cu P.I.S.D., iar*:

   $$\bigoplus_{p|m}mG_p=0;$$

3. $G=\boldsymbol{Z}$;
4. *G este divizibil*;

5) m este un număr prim.

***Demonstraţie*: 1)** Fie G un p-grup cu P.I.S.D.. Ca şi la (2.3.1.7), distingem trei cazuri:

Cazul 1: Există un $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$G=\mathbf{Z}(p^n).$$

Dacă p^i divide pe m, cu $i\geq1$, atunci:

$$mG\cong\mathbf{Z}(p^{n-i}),$$

dacă $i\leq n-1$, şi:

$$mG=0,$$

pentru $i\geq n$. Rezultă că, în acest subcaz,

$$G/mG\cong\mathbf{Z}(p^i)$$

este idecompozabil şi, deci, G/mG are P.I.S.D.. Dacă p^i nu divide pe m, pentru orice $i\geq1$, atunci:

$$G/mG=0.$$

Aşadar, în acest caz, G/mG are P.I.S.D..

Cazul 2: Dacă:

$$G=\mathbf{Z}(p^\infty),$$

atunci, pentru orice $m\in\mathbf{N}^*$,

$$mG=G \qquad \text{şi} \qquad G/mG=0.$$

Cazul 3: Există un cardinal m_p astfel încât:

$$G=(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))\oplus C_p,$$

unde:

$$C_p=0 \qquad \text{sau} \qquad C_p=\mathbf{Z}(p^\infty).$$

Dacă există $i\geq1$ astfel încât p^i divide pe m, atunci:

$$mG=C_p \qquad \text{şi} \qquad G/mG\cong G/C_p\cong\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p)$$

are P.I.S.D., fiind un p-grup elementar. Dacă nu există $i\geq1$ astfel încât p^i să dividă pe m, atunci:

$$mG=G \qquad \text{şi} \qquad G/mG=0.$$

2) Fie G un grup de torsiune, ca şi în enunţ. Atunci, conform lui (2.3.1.2)1),

$$mG=\bigoplus_{p\in P_1^*}G_p,$$

unde:

$$P_1^*=\{p\in P_1 \mid p \text{ nu divide pe } m\}.$$

Rezultă că:

$$G/mG\cong\bigoplus_{p|m}G_p=\bigoplus_{p\in P_1\setminus P_1^*}G_p$$

are P.I.S.D..

3) Fie:

$$m=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$$

descompunerea lui m în produs de puteri de numere prime; deci, pentru orice i=1, 2, … , k, p_i sunt numere prime, iar n_i sunt numere naturale nenule. Dacă:

$$G=\mathbf{Z},$$

atunci:

$$G/mG=\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}=\mathbf{Z}(m)=\mathbf{Z}(p_1^{n_1})\oplus\mathbf{Z}(p_2^{n_2})\oplus\ldots\oplus\mathbf{Z}(p_k^{n_k})$$

şi are P.I.S.D., conform lui (2.1.2.3).

4) Dacă G este divizibil, atunci:

$$mG=G \qquad \text{şi} \qquad G/mG=0.$$

5) Dacă p este un număr prim, atunci G/mG este un p-grup elementar şi, în acest caz, (2.1.2.1) completează demonstraţia. □

2.3.2. Subgrupuri de forma G[m], m∈N*

Fie G un grup abelian şi m un număr natural (oarecare), m≥2. Atunci:

$$G[m]=\{g\in G \mid m\cdot g=0\}$$

este un subgrup al lui G. În această secţiune vom prezenta condiţiile în care G[m] şi G/G[m] au P.I.S.D., dacă G are această proprietate. Pentru aceasta, însă, avem nevoie de următorul rezultat:

Lema 2.3.2.1: *Fie G un grup oarecare şi m∈**N***, m≥2.*

1) *Dacă H este un sumand direct în G, atunci H[m] este un sumand direct în G[m].*

2) *Dacă T şi S sunt subgrupuri în G, atunci:*

$$T[m]\cap S[m]=(T\cap S)[m].$$

3) *Dacă în G orice subgrup pur este sumand direct şi K este un sumand direct în G[m], atunci există H - sumand direct în G astfel încât:*

$$H[m]=K.$$

***Demonstraţie*: 1)** Fie:

$$G=H\oplus K$$

o descompunere directă (oarecare) a lui G. Vom demonstra că:

$$G[m]=H[m]\oplus K[m].$$

Dacă g∈G[m], atunci există un h∈H şi există un k∈K astfel încât:

$$g=h+k \qquad \text{şi} \qquad m\cdot g=m\cdot h+m\cdot k=0.$$

Deoarece:

$$H\cap K=0,$$

rezultă că:

$m\cdot h=m\cdot(-k)=-m\cdot k=0$,

adică $h\in H[m]$ şi $k\in K[m]$. Deci $G[m]\subseteq H[m]\oplus K[m]$, deoarece:

$H[m]\cap K[m]\subseteq H\cap K=0$.

Cum:

$H[m]+K[m]=H[m]\oplus K[m]\subseteq G[m]$,

obţinem egalitatea din enunţ.

2) Fie T şi S două subgrupuri ale lui G şi $x\in T[m]\cap S[m]$. Atunci $x\in T$, cu:

$m\cdot x=0$

şi $x\in S$ cu:

$m\cdot x=0$.

Rezultă că $x\in T\cap S$ cu:

$m\cdot x=0$,

adică $x\in(T\cap S)[m]$ şi $T[m]\cap S[m]\subseteq(T\cap S)[m]$. Deoarece $(T\cap S)[m]\subseteq T[m]\cap S[m]$, rezultă că are loc egalitatea din enunţ.

3) Presupunem că grupul G are proprietatea din enunţ şi considerăm K - un sumand direct în G[m]. Distingem două cazuri:

<u>Cazul 1:</u> Dacă:

$mG=0$,

atunci:

$G[m]=G$

şi orice sumand direct K, al lui G[m], este un sumand direct în G şi:

$K[m]=K$.

<u>Cazul 2:</u> Dacă $mG\neq 0$, atunci fie $g\in G$, cu:

$\langle g\rangle[m]=0$

şi fie:

$H=\langle K,g\rangle$.

Vom demonstra că:

$H[m]=K$.

Dacă $h\in H$, atunci:

$h=k+n\cdot g$,

cu $k\in K$ şi $n\in\mathbf{Z}$. Egalitatea:

$m\cdot h=0$

implică:

$m\cdot(n\cdot g)=0$;

deci:

$g=0$ şi $H[m]=K$.

Dacă H[m] este un sumand direct în G[m], atunci, din [41, 29.1], rezultă că H este un subgrup pur în G; conform ipotezei, H este un sumand direct în grupul G. □

Desigur că în rezolvarea problemei din această secţiune ne interesează doar cazurile în care $G[m]\neq 0$, deci grupurile de torsiune şi cele mixte; celelalte cazuri devin triviale. Începem cu p-grupurile.

Propoziţia 2.3.2.2: *Dacă G este un p-grup cu P.I.S.D., atunci, pentru orice $m\in \mathbf{N}^*$, G[m] are P.I.S.D..*

Demonstraţie**:** Fie G un p-grup cu P.I.S.D. şi m un număr natural (oarecare), $m\geq 2$. Dacă G este idecompozabil, atunci G[m] este tot un p-grup idecompozabil. Dacă:

$$G=B_p\oplus C_p,$$

unde:

$pB_p=0$, $C_p=0$ sau $C_p=\mathbf{Z}(p^\infty)$,

atunci fie H un subgrup pur în G. Rezultă că:

$$pH=H\cap pG=H\cap p(B_p\oplus C_p)=H\cap(pB_p\oplus pC_p)=H\cap C_p.$$

Dacă:

$C_p=0$,

Atunci, conform cu [41, 27.5], H este un sumand direct în G, iar dacă:

$C_p=\mathbf{Z}(p^\infty)$,

atunci H ori îl conţine, ori nu îl conţine pe $\mathbf{Z}(p^\infty)$, deoarece $\mathbf{Z}(p^\infty)$ nu are subgrupuri pure proprii - vezi [41, §26.(c)]. În acest (ultim) caz,

$pH=\mathbf{Z}(p^\infty)$.

Aşadar H este un sumand direct în G. Fie, acum, T şi S doi sumanzi direcţi în G[m]. Conform cu (2.3.2.1)3), există U şi V - sumanzi direcţi în G astfel încât:

$U[m]=T$ şi $V[m]=S$.

Deoarece G are P.I.S.D., rezultă că $U\cap V$ este un sumand direct în G. Din (2.3.2.1)2),1) rezultă că:

$$(U\cap V)[m]=U[m]\cap V[m]=T\cap S$$

este un sumand direct în G[m]; deci G[m] are P.I.S.D.. □

Din (2.3.2.2) obţinem:

Corolarul 2.3.2.3: *Dacă G este un grup de torsiune cu P.I.S.D., atunci, pentru orice $m\in \mathbf{N}^*$, G[m] are P.I.S.D..*

Demonstraţie**:** Fie,

$$G=\bigoplus_{p\in P_1} G_p$$

un grup de torsiune cu P.I.S.D., unde P_1 este o mulţime de numere prime şi, pentru orice $p \in P_1$, G_p este un p-grup cu P.I.S.D., conform cu (1.1.3). Atunci, din (2.3.2.1)1) şi (2.3.2.2), rezultă că:

$$G[m]=\bigoplus_{p\in P_1} G_p[m]$$

şi, pentru orice $p \in P_1$, $G_p[m]$ este un p-grup cu P.I.S.D.. Iarăşi (1.1.3) completează demonstraţia. □

Corolarul 2.3.2.4: *Dacă G este un grup mixt scindabil, cu P.I.S.D., atunci, pentru orice $m \in$ **N***, G[m] are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Dacă G este un grup ca şi în enunţ, atunci, conform cu (2.1.5.2),

$$G=T\oplus D\oplus B,$$

unde:

$$T=T(G),$$

D este subgrupul maximal divizibil (fără-torsiune) al lui G, iar B este un grup fără-torsiune, redus, cu P.I.S.D.. Atunci:

$$G[m]=T[m]$$

şi (2.3.2.3) completează demonstraţia. □

Referitor la reciprocele acestor corolare avem:

Observaţia 2.3.2.5: *Reciproca lui (2.3.2.2) (şi implicit a lui (2.3.2.3)) nu este, în general, adevărată.*

***Demonstraţie*:** Contraexemplu: fie p un număr prim şi:

$$G=\mathbf{Z}(p^2)\oplus\mathbf{Z}(p^2).$$

Atunci:

$$G[p]=\mathbf{Z}(p^2)[p]\oplus\mathbf{Z}(p^2)[p]\cong\mathbf{Z}(p)\oplus\mathbf{Z}(p).$$

Rezultă că G[p] are P.I.S.D., dar G nu are această proprietate. □

Referitor la grupul factor G/G[m] avem următorul rezultat:

Propoziţia 2.3.2.6: *Fie G un grup abelian şi m un număr natural (oarecare), $m\geq 2$. Atunci*:

grupul G/G[m] are P.I.S.D. dacă şi numai dacă mG are această proprietate.

***Demonstraţie*:** Fie,

$$\rho_m : G \to G$$

înmulţirea cu m în G. Atunci:

$$\ker\rho_m=G[m] \qquad \text{şi} \qquad \mathrm{Im}\rho_m=mG.$$

Rezultă că şirul:

$$0 \to G[m] \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ \rho_m\ } mG \to 0$$

este exact. Deci:

$G/G[m]\cong mG$

şi demonstraţia este completă. □

Din (2.3.2.6) şi cele demonstrate în secţiunea precedentă obţinem:

Corolarul 2.3.2.7: *Fie G un grup abelian cu P.I.S.D. şi m un număr natural (oarecare), m≥2. În oricare din următoarele cazuri, G/G[m] are P.I.S.D.*:

1) *G este un p-grup*;
2) *G este un grup de torsiune*;
3) *G este un grup fără-torsiune*;
4) *G este un grup mixt scindabil*. □

2.3.3. Subgrupuri de forma $m^{-1}G$, $m\in N^*$

Peste tot în această secţiune vom nota cu A un grup abelian oarecare, G va fi un subgrup al lui A şi m≥2 va fi un număr natural, oarecare. Se ştie că:

$m^{-1}G=\{a\in A \mid m\cdot a\in G\}$

este un subgrup al lui A.

Proprietăţile subgrupului $m^{-1}G$, care ne vor fi utile în continuare, sunt prezentate în:

Propoziţia 2.3.3.1: *Dacă G este un subgrup al grupului A, m≥2 este un număr natural, oarecare, iar H şi K sunt subgrupuri ale lui G, atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) $m^{-1}H\cap m^{-1}K=m^{-1}(H\cap K)$;
2) *Dacă*:

   $G[m]=0$

   şi T este un subgrup al lui $m^{-1}G$, atunci există S - subgrup în G astfel încât:

   $T=m^{-1}S$.

***Demonstraţie*: 1)** Dacă $x\in m^{-1}H\cap m^{-1}K$, atunci $m\cdot x\in H$ şi $m\cdot x\in K$; deci $m\cdot x\in H\cap K$, adică $x\in m^{-1}(H\cap K)$. Rezultă că $m^{-1}H\cap m^{-1}K\subseteq m^{-1}(H\cap K)$. (∗) Dacă $y\in m^{-1}(H\cap K)$, atunci $m\cdot y\in H\cap K$; deci $m\cdot y\in H$ şi $m\cdot y\in K$, adică $y\in m^{-1}H\cap m^{-1}K$. Aşadar, are loc şi cealaltă incluziune: $m^{-1}(H\cap K)\subseteq m^{-1}H\cap m^{-1}K$. (∗∗) Din relaţiile (∗) şi (∗∗) obţinem egalitatea din enunţ.

2) Fie:

$S=\{m\cdot t \mid t\in T\}=mT$.

Atunci, conform lui [41, §1] şi ipotezei,

$m^{-1}S=m^{-1}(mT)=T+G[m]=T$. □

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următorul:

Teorema 2.3.3.2: *Fie A un grup abelian cu*:

$A[m]=0$,

pentru un număr natural $m\geq 2$ şi G un subgrup pur în A. Atunci:

$$G=H\oplus K \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad m^{-1}G=m^{-1}H\oplus m^{-1}K.$$

***Demonstraţie*:** Deoarece:

$$m^{-1}(mG)=G+A[m] \quad \text{şi} \quad mG=G\cap mA,$$

din (2.3.3.1) obţinem:

$$G=G+A[m]=m^{-1}(mG)=m^{-1}(G\cap mA)=(m^{-1}G)\cap[m^{-1}(mA)]$$
$$=(m^{-1}G)\cap(A+mA)=(m^{-1}G)\cap A=m^{-1}G.$$

Dacă:

$$G=H\oplus K,$$

atunci H şi K sunt subgrupuri pure şi în G şi în A, conform cu [23, p. 105-106]. □

Din (2.3.3.2) obţinem:

Corolarul 2.3.3.3: *În condiţiile de la (2.3.3.2), subgrupul G are P.I.S.D. exact dacă $m^{-1}G$ are această proprietate.* □

Corolarul 2.3.3.4: *Dacă A este un grup fără-torsiune şi G este un subgrup pur al lui A, în particular G este un sumand direct (în A), atunci*:

G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă $m^{-1}G$ are P.I.S.D.. □

Încheiem această secţiune cu:

Observaţia 2.3.3.5: *În (2.3.3.2), (2.3.3.3) şi, respectiv (2.3.3.4), condiţiile ca*:

$$A[m]=0$$

sau:

G - subgrup în A, cu proprietatea că:

$$mG=mA\cap G,$$

sunt fundamentale. Astfel, dacă una din aceste condiţii nu este îndeplinită, atunci, concluziile de la (2.3.3.3) şi, respectiv (2.3.3.4), pot să nu (mai) aibă loc.

***Demonstraţie*:** Contraexemple: **1)** Fie:

$$A=\mathbf{Z}(4)\oplus\mathbf{Z}(2) \quad \text{şi} \quad G=\mathbf{Z}(2).$$

Atunci G este un subgrup pur în A,

$$2^{-1}G=A,$$

$A[2]\neq 0$, G are P.I.S.D., dar $2^{-1}G$ nu mai are această proprietate.

2) Fie:

$$A=\mathbf{Z}(16)\oplus\mathbf{Z}(4)\oplus\mathbf{Z}(3)$$

şi G un subgrup al lui A, izomorf cu $\mathbf{Z}(2)$. Atunci:

$$2G=0,$$

$2A\cap G\neq 0$, G are P.I.S.D., dar:

$$2^{-1}G\cong\mathbf{Z}(4)\oplus\mathbf{Z}(4)$$

nu are P.I.S.D.. □

2.3.4. Subgrupul lui Frattini

Subgrupul Frattini al unui grup G, notat cu F(G) şi definit ca intersecţia tuturor subgrupurilor maximale ale lui G, a fost introdus prima dată de G. Frattini în 1885. Proprietăţile acestui subgrup au fost studiate şi prezentate în peste 200 de lucrări ştiinţifice apărute până acum. Pe noi ne interesează doar proprietăţile exprimate în următoarea lemă:

Lema 2.3.4.1: *Pentru orice grup abelian G, au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Subgrupul M este maximal în G dacă şi numai dacă este de indice prim*;

2) *Intersecţia tuturor subgrupurilor maximale, ale lui G, de indice p, este pG*;

3) $F(G)=\bigcap_{p\in P} p(G)$,

*unde p parcurge întreaga mulţime **P** a numerelor prime*;

4) *G este divizibil dacă şi numai dacă*:

$F(G)=G$;

5) *Dacă G este fără-torsiune, iar H şi K sunt subgrupuri ale lui G, atunci*:

$F(H\cap K)=F(H)\cap F(K)$;

6) *Dacă U este un subgrup în F(G), atunci există H - un subgrup în G astfel încât*:

$F(H)=U$.

În plus, dacă U este un sumand direct în F(G), atunci şi H este un sumand direct în G.

7) *Dacă G este fără-torsiune, iar H şi K sunt subgrupuri în G, atunci*:

$t(H)\leq t(K)$ *dacă şi numai dacă* $t(F(H))\leq t(F(K))$;

aici t(A) notează tipul grupului A.

Demonstraţie**:** **1)** Fie M un subgrup maximal în G. Dacă G/M nu este ciclic, atunci există un generator x+M al lui G/M, cu proprietatea că $\langle x,M\rangle\neq G$; aceasta contrazice maximalitatea lui M. Aşadar G/M este ciclic; să presupunem că:

$G/M=\langle g+M\rangle$.

Dacă G/M este infinit, atunci, iarăşi, există un $y\in G$ astfel încât $\langle y+M\rangle\subset\langle g+M\rangle$ şi $\langle y,M\rangle\neq G$. Deci G/M este finit. Fie:

$m=|G : M|$ şi $G/M=\bigoplus_{p|m}(G/M)_p$

descompunerea lui G/M în p-componentele sale, conform cu [41, 8.4]. Atunci, pentru fiecare p care divide pe m, există un subgrup G_p, al lui G, astfel încât $M\subset G_p\subset G$, ceea ce este o contradicţie cu ipoteza. Rezultă că m este un număr prim.

Reciproc, presupunem că:

$|G : M|=p$,

unde p este un număr prim, şi că există H - un subgrup în G astfel încât $M\subset H\subset G$. Atunci H/M este un subgrup în G/M şi

($|H : M|=1$, caz în care H=M) sau ($|H : M|=p$, caz în care H=G).

Rezultă că M este maximal în G.

2) Fie p un număr prim şi $F_p(G)$ intersecţia tuturor subgrupurilor maximale, de indice p, ale lui G. Dacă M este un submodul maximal, de indice p, atunci $pG\subseteq M$. Rezultă că $pG\subseteq F_p(G)$. (*) Grupul G/pG este un p-grup elementar; deci:

$F(G/pG)=pG$.

Rezultă că intersecţia tuturor subgrupurilor maximale M_i/pG, $i\in I$, ale lui G/pG, este pG. Dar, atunci, M_i, $i\in I$, sunt subgrupuri maximale de indice p, ale lui G şi $\bigcap_{i\in I} M_i \subseteq pG$. (**) Din relaţiile (*) şi (**) obţinem că:

$F_p(G)=pG$.

3) Egalitatea din enunţ rezultă din cele demonstrate la punctul 2) şi din faptul că:

$F(G)=\bigcap_{p\in P} F_p(G)$.

4) Dacă G este divizibil, atunci, pentru orice p - număr prim,

$pG=G$.

Rezultă că:

$G=F(G)$.

Reciproc, dacă:

$G=F(G)$,

atunci, pentru orice p - număr prim, $G\subseteq pG$ şi, deoarece $pG\subseteq G$, rezultă că, pentru orice p - număr prim,

$pG=G$,

adică G este p-divizibil. Conform cu [41, §20.(A)], G este divizibil.

5) Fie H şi K două subgrupuri ale lui G şi $x\in F(H)\cap F(K)$. Atunci, pentru orice p - număr prim, există un $h_p\in H$ şi un $k_p\in K$ astfel încât:

$x=p\cdot h_p=p\cdot k_p$.

Conform ipotezei, rezultă că:

$h_p=k_p$

şi $x\in F(H\cap K)$. Aşadar $F(H)\cap F(K)\subseteq F(H\cap K)$ şi cum incluziunea inversă are loc întotdeauna, obţinem egalitatea din enunţ.

6) Fie U un subgrup în F(G) şi D - învelitoarea divizibilă a lui U. Pentru fiecare p - număr prim, considerăm mulţimea:

$$H_p=\{g\in G\cap D \mid p\cdot g\in U\}.$$

Atunci H_p este un subgrup în G şi:

$$pH_p=U.$$

Dacă:

$$H=\{g\in G\cap D \mid \text{pentru orice } p \text{ - număr prim}, p\cdot g\in U\},$$

atunci:

$$H=\bigcap_{p\in P} H_p \quad \text{şi} \quad F(H)=\bigcap_{p\in P} pH_p=U.$$

Dacă U este un sumand direct în F(G), atunci, conform cu [28, Teorema 5.d)], H este un sumand direct în G.

7) Fie G un grup fără-torsiune, H şi K două subgrupuri în G, cu $t(H)\leq t(K)$ şi fie $h\in H$ cu:

$$n=p$$

- înălţimea lui h în H; deci:

$$n=h_H^p(h).$$

Atunci $h\in p^nH$ şi $h\notin p^{n+1}H$. Deoarece $h\in p^{n-1}(pH)$ şi $h\notin p^n(pH)$, rezultă că:

$$h_{pH}^p(h)=n-1.$$

Rezultă că dacă $h\in F(H)$ şi:

$$\chi_H=(k_1,\ldots,k_n,\ldots)$$

este caracteristica lui h în H, atunci caracteristica aceluiaşi h în F(H) este:

$$\chi_{F(H)}=(k_1-1,\ldots,k_n-1,\ldots).$$

Considerăm, acum, $u\in F(H)$ şi $v\in F(K)$ şi fie:

$$t_1'=t_{F(H)}(u)=(m_1,\ldots,m_n,\ldots)$$

şi:

$$t_2'=t_{F(K)}(v)=(l_1,\ldots,l_n,\ldots)$$

tipurile elementelor u, respectiv v, reprezentate de câte o caracteristică a lor. Din cele demonstrate mai sus, rezultă că:

$$t_1=t_H(u)=(m_1+1,\ldots,m_n+1,\ldots)$$

și:

$$t_2=t_K(v)=(l_1+1,\ldots,l_n+1,\ldots).$$

Conform ipotezei, $t_1\leq t_2$, dar aceasta are loc exact dacă, pentru orice $i\geq 1$, $m_i\leq l_i$, ceea ce este echivalent cu faptul că $t(F(H))\leq t(F(K))$. □

Următorul rezultat, datorat lui Dlab (vezi [28, Teorema 2]) îl vom folosi foarte mult în dezvoltările noastre.

Teorema 2.3.4.2: *Dacă G_i, $i \in I$, este o familie de grupuri abeliene, atunci are loc egalitatea*:

$$F(\bigoplus_{i \in I} G_i) = \bigoplus_{i \in I} F(G_i). \square \qquad (38)$$

Trecem acum la rezolvarea problemei noastre:

- „*Dacă G este un grup cu P.I.S.D., când F(G) are şi el P.I.S.D.?*".

Şi aici începem cu p-grupurile.

Propoziţia 2.3.4.3: *Dacă G este un p-grup cu P.I.S.D., atunci şi F(G) are P.I.S.D.*.

***Demonstraţie*:** Ca şi în alte situaţii precedente, conform cu (2.1.2.2), distingem următoarele cazuri:

<u>Cazul 1:</u> Există un $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$, astfel încât:

$$G = \mathbf{Z}(p^n).$$

Atunci:

$$F(G) = \bigcap_{q \in P} qG = pG \cap (\bigcap_{q \in P \setminus \{p\}} qG) = H \cap G = H \cong \mathbf{Z}(p^{n-1}),$$

unde:

$$H = pG.$$

Deci, în acest caz, F(G) este idecompozabil şi are P.I.S.D..

<u>Cazul 2:</u> Dacă:

$$G = \mathbf{Z}(p^\infty),$$

Atunci, conform cu (2.3.4.1)4):

$$G = F(G).$$

<u>Cazul 3:</u> Există un cardinal m_p astfel încât:

$$G = (\oplus_{m_p} \mathbf{Z}(p)) \oplus C_p,$$

unde:

$$C_p = 0 \qquad \text{sau} \qquad C_p = \mathbf{Z}(p^\infty).$$

Fie:

$$B_p = \oplus_{m_p} \mathbf{Z}(p).$$

Atunci:

$$G = B_p \oplus C_p$$

şi, conform relaţiei (38),

$$F(G) = F(B_p) \oplus F(C_p) = (\oplus_{m_p} F(\mathbf{Z}(p))) \oplus F(C_p) = C_p$$

are P.I.S.D.. $\square$

Concluzia din (2.3.4.3) este valabilă şi pentru alte clase de grupuri:

Corolarul 2.3.4.4: *Dacă G este un grup de torsiune cu P.I.S.D., atunci şi F(G) are aceeaşi proprietate.*

***Demonstraţie*:** Dacă G este un grup ca şi în enunţ, atunci:

$$G=\bigoplus_{p\in P_1} G_p,$$

unde P_1 este o mulţime de numere prime şi, pentru orice $p\in P_1$, G_p este un p-grup cu P.I.S.D., conform cu (1.1.3). Relaţia (38) implică:

$$F(G)=\bigoplus_{p\in P_1} F(G_p),$$

unde, pentru orice $p\in P_1$, $F(G_p)$ este un p-grup cu P.I.S.D., conform cu (2.3.4.3). Deoarece, pentru orice $p\in P_1$, $F(G_p)$ este un p-grup total invariant în F(G), rezultă că (1.1.2) completează demonstraţia. □

Observaţia 2.3.4.5: *Reciproca lui (2.3.4.3) (şi, deci, şi a lui (2.3.4.4)) este, în general, falsă.*

Demonstraţie: Contraexemplu: fie,

$$G=\mathbf{Z}(p)\oplus\mathbf{Z}(p^2)\oplus\mathbf{Z}(p^\infty).$$

Atunci:

$$F(G)\cong\mathbf{Z}(p)\oplus\mathbf{Z}(p^\infty)$$

are P.I.S.D., dar G nu are această proprietate. □

Referitor la grupurile divizibile şi grupurile libere, avem următoarele rezultate triviale:

Observaţiile 2.3.4.6: 1) *Deoarece în cazul unui grup divizibil G,*

$$F(G)=G,$$

rezultă că dacă G este un astfel de grup, atunci G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă F(G) are P.I.S.D..

2) *Deoarece*:

$$F(\mathbf{Z})=0,$$

rezultă din relaţia (37) că, oricare ar fi G un grup liber,

$$F(G)=0$$

are în mod trivial P.I.S.D.. □

Pentru grupurile fără-torsiune avem acelaşi rezultat ca şi la (2.3.4.4):

Teorema 2.3.4.7: *Dacă G este un grup fără-torsiune, complet decompozabil, cu P.I.S.D., atunci şi F(G) are aceeaşi proprietate.*

***Demonstraţie*:** Fie G un grup fără-torsiune cu P.I.S.D.. Şi aici, ca şi în alte situaţii, precedente, conform cu (2.1.4.3), distingem trei cazuri:

Cazul 1: Dacă G este neredus, atunci el este de forma:

$$G=(\oplus_m \mathbf{Q})\oplus(\oplus_n C),$$

unde m este un cardinal oarecare, n este un număr natural, iar C este un grup redus, de rang unu. În acest caz obţinem, conform relaţiei (38) şi lui (2.3.4.1)4):

$$F(G)=(\oplus_m F(\mathbf{Q}))\oplus(\oplus_n F(C))=(\oplus_m \mathbf{Q})\oplus(\oplus_n F(C)),$$

unde:

(F(C)=0, dacă $C=\mathbf{Z}$) sau (F(C)≠0, dacă $C\neq\mathbf{Z}$).

Deci F(G) este tot un grup de forma (13) şi, deci, are P.I.S.D..

Cazul 2: Grupul G este redus şi este de forma:

$$G=\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{m_i} G_i),$$

unde, pentru orice $i\in I$, m_i este un cardinal oarecare, iar G_i este un grup (redus) de rang unu şi, pentru orice $i_1, i_2\in I$, $i_1\neq i_2$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt incomparabile. În acest caz, notând ca şi în (2.2.3.6), pentru fiecare $i\in I$, cu:

$$G_i^*=\oplus_{m_i} G_i,$$

obţinem că:

$$F(G)=\bigoplus_{i\in I}F(G_i^*)$$

şi, pentru orice $i_1, i_2\in I$, $i_1\neq i_2$, $F(G_{i_1}^*)$ şi $F(G_{i_2}^*)$ sunt sau nule, sau tot grupuri reduse, omogene, complet decompozabile şi, conform lui (2.3.4.1)7), total invariante în F(G). Atunci, conform lui (2.1.4.3), rezultă că F(G) are P.I.S.D..

Cazul 3: Grupul G este redus şi este de forma:

$$G=(\oplus_n B)\oplus(\bigoplus_{i\in I}G_i),$$

unde:

- n este un număr natural

şi:

- B este un grup (redus) de rang unu şi de tip ν,
- pentru orice $i\in I$, G_i este un grup (redus) de rang unu şi de tip μ_i, cu $\nu<\mu_i$, şi, pentru orice $i_1, i_2\in I$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt tipuri incomparabile.

Atunci:

$$F(G)=(\oplus_n F(B))\oplus(\bigoplus_{i\in I}F(G_i)),$$

unde:

- F(B)=0 sau F(B) este (tot) un grup (redus) de rang unu şi de tip ν'_i;

- pentru orice $i \in I$, $F(G_i)$ este (tot) un grup (redus) de rang unu şi de tip μ'_i, cu $\nu'_i < \mu'_i$ şi, pentru orice $i_1, i_2 \in I$, $t(F(G_{i_1}))$ şi $t(F(G_{i_2}))$ sunt tipuri incomparabile.

Aşadar, şi în acest caz, F(G) este (tot) un grup de forma (15); deci F(G) are P.I.S.D.. □

Observaţia 2.3.4.8: *Reciproca lui (2.3.4.7) este, în general, falsă, adică: dacă G este un grup fără-torsiune, complet decompozabil, cu proprietatea că F(G) are P.I.S.D., nu rezultă că şi G are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Contraexemplu: fie,

$$G=(\oplus_{m_0}\mathbf{Q})\oplus(\oplus_n C)\oplus(\oplus_{m_1}\mathbf{Z}),$$

unde m_0 este un cardinal oarecare, n şi m_1 sunt numere naturale nenule, iar C este un grup fără-torsiune, redus, de rang unu, cu $t(C)\neq t(\mathbf{Z})$. Atunci, conform lui (2.1.4.3), G nu are P.I.S.D., dar:

$$F(G)=(\oplus_{m_0}\mathbf{Q})\oplus(\oplus_n F(C))$$

are această proprietate. □

Combinând cele obţinute în (2.3.4.4), (2.3.4.7), (2.1.5.2) şi (2.1.5.4) obţinem:

Corolarul 2.3.4.9: *Dacă G este un grup mixt scindabil, cu P.I.S.D., atunci şi F(G) are P.I.S.D..* □

Din (2.3.4.5) şi (2.3.4.8) rezultă:

Observaţia 2.3.4.10: *Reciproca lui (2.3.4.9) este, în general, falsă, adică: există grupuri abeliene mixte (scindabile) G, cu proprietatea că F(G) are P.I.S.D., fără ca G să aibă această proprietate.* □

Considerăm, acum, pe G ca fiind un grup de torsiune şi fie:

$$G=\bigoplus_{p\in P_1} G_p,$$

unde P_1 este o mulţime de numere prime, descompunerea directă a lui G în p-componentele sale. În acest caz,

$$F(G)=\bigoplus_{p\in P_1} F(G_p)=\bigoplus_{p\in P_1} pG_p.$$

Dacă:

$$\overline{g}\in G/F(G)=(\bigoplus_{p\in P_1} G_p)/(\bigoplus_{p\in P_1} pG_p),$$

atunci există un $k\in\mathbf{N}^*$ şi, pentru orice $i=1, 2, \ldots, k$, există un $g_{p_i}\in G_{p_i}$ astfel încât:

$$\overline{g}=g_{p_1}+\ldots+g_{p_k}+(\bigoplus_{p\in P_1} pG_p),$$

iar ordinul lui $\overline{g}$ este egal cu $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$. Rezultă că orice element din G/F(G) este de ordin liber de pătrate. Deci:

G/F(G)=S(G/F(G)),

aici S(A) notează soclul grupului A, şi G/F(G) este un grup elementar.

Sintetizând cele obţinute în acest paragraf, referitor la grupul factor G/F(G), obţinem următorul rezultat:

Propoziţia 2.3.4.11: *Fie G un grup abelian cu P.I.S.D. şi F(G) - subgrupul său Frattini. În oricare din următoarele situaţii, G/F(G) are P.I.S.D.*:

1) *G este un p-grup*;
2) *G este un grup de torsiune*;
3) *G este un grup liber*;
4) *G este un grup divizibil*;
5) *G este suma directă dintre un grup liber, de rang finit, şi un grup divizibil, fără-torsiune*;
6) *G este suma directă dintre un grup elementar, un grup divizibil, fără-torsiune, şi un grup liber, de rang finit.* □

2.3.5. Subgrupurile p-bazice

În această secţiune vom rezolva problema analoagă celor din secţiunile precedente ale acestui capitol, pentru subgrupurile p-bazice.

Definiţie: *([41, §32]) Fie G un grup abelian şi p un număr prim, oarecare. Un subgrup B, al lui G, se numeşte subgrup p-bazic, dacă satisface la următoarele condiţii*:

a) *B este o sumă directă de p-grupuri ciclice şi de grupuri ciclice infinite*;
b) *B este p-pur în G*;
c) *G/B este p-divizibil*.

Din [41, 32.2 şi 35.2] rezultă că orice grup abelian conţine, pentru orice număr prim p, subgrupuri p-bazice, şi acestea sunt izomorfe.

Conform definiţiei, dacă B este un subgrup p-bazic în G, atunci:

$$B=B_0\oplus B_1\oplus\ldots\oplus B_n\oplus\ldots, \qquad (39)$$

unde:

$$B_0=\oplus\mathbf{Z}$$

şi, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$,

$$B_n=\oplus\mathbf{Z}(p^n).$$

Din cele de mai sus rezultă:

Observaţia 2.3.5.1: *Grupul G este p-bazic (în G) dacă şi numai dacă G este de forma lui B din relaţia (39)*. □

Observaţia 2.3.5.2: *Subgrupul 0 este p-bazic în grupul G dacă şi numai dacă G este p-divizibil*. □

Observaţia 2.3.5.3: *Din (2.3.5.2) rezultă că dacă G este divizibil, atunci subgrupul său p-bazic este 0 şi, deci, acesta are, în mod trivial, P.I.S.D., indiferent dacă G are sau nu, această proprietate.* □

În investigaţiile noastre vom folosi foarte mult următorul rezultat tehnic:

Teorema 2.3.5.4: *Dacă B_i, $i\in I$, este un subgrup p-bazic în G_i, $i\in I$, atunci $\bigoplus_{i\in I} B_i$ este un subgrup p-bazic în $\bigoplus_{i\in I} G_i$.*

***Demonstraţie*:** Vom demonstra că dacă, pentru orice $i\in I$, B_i satisface la condiţiile a) - c) din definiţia de mai sus, relative la grupul G_i, atunci şi $\bigoplus_{i\in I} B_i$ satisface aceleaşi condiţii, relative la grupul $\bigoplus_{i\in I} G_i$. Dacă relaţia a) are loc pentru fiecare B_i, atunci ea are loc şi pentru $\bigoplus_{i\in I} B_i$. Fie:

$$x\in(\bigoplus_{i\in I} B_i)\cap p(\bigoplus_{i\in I} G_i)=(\bigoplus_{i\in I} B_i)\cap(\bigoplus_{i\in I} pG_i),$$

conform cu (2.3.1.2)1). Atunci există un $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$x=b_{i_1}+\ldots+b_{i_n}=p\cdot g_{i_1}+\ldots+p\cdot g_{i_n}$$

(eventual completăm cu 0), unde, pentru orice k=1, 2, …, n, $b_{i_k}\in B_{i_k}$ şi $g_{i_k}\in G_{i_k}$. Rezultă că:

$$(b_{i_1}-p\cdot g_{i_1})+\ldots+(b_{i_n}-p\cdot g_{i_n})=0.$$

Deoarece, pentru orice k=1, 2, …, n, $b_{i_k}-p\cdot g_{i_k}\in G_{i_k}$ şi deoarece 0 are o descompunere unică în $\bigoplus_{i\in I} G_i$, rezultă că, pentru orice k=1, 2, …, n,

$$b_{i_k}=p\cdot g_{i_1},$$

adică:

$$b_{i_k}\in B_{i_k}\cap pG_{i_k}=pB_{i_k},$$

datorită p-purităţii lui B_{i_k} în G_{i_k}. Rezultă că, pentru orice k=1, 2, …, n, există un $b^*_{i_k}\in B_{i_k}$ astfel încât:

$$b_{i_k}=p\cdot b^*_{i_k} \quad \text{şi} \quad x=p\cdot(b^*_{i_1}+\ldots+b^*_{i_n})\in p(\bigoplus_{i\in I} B_i).$$

Aşadar $(\bigoplus_{i\in I} B_i)\cap p(\bigoplus_{i\in I} G_i)\subseteq p(\bigoplus_{i\in I} B_i)$. Această incluziune arată că $\bigoplus_{i\in I} B_i$ este un subgrup p-pur în $\bigoplus_{i\in I} G_i$. Fie, acum, $x, y\in\bigoplus_{i\in I} G_i$ şi $\overline{x}$, $\overline{y}$ - clasele lor modulo $(\bigoplus_{i\in I} B_i)$.

Considerăm ecuaţia:

$$p\cdot \overline{x} = \overline{y} \qquad (*)$$

în $(\bigoplus_{i\in I} G_i)/(\bigoplus_{i\in I} B_i)$. Atunci:

$$x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}, \qquad y = y_{j_1} + \ldots + y_{j_m},$$

unde:

- $m, n \in \mathbf{N}^*$,
- pentru orice k=1, 2, …, n, $x_{i_k} \in G_{i_k}$

şi,

- pentru orice l=1, 2, …, m, $y_{j_l} \in G_{j_l}$,

iar ecuaţia (∗) devine:

$$p\cdot(x_{i_1} + \ldots + x_{i_n} + (\bigoplus_{i\in I} B_i)) = y_{j_1} + \ldots + y_{j_m} + (\bigoplus_{i\in I} B_i). \qquad (**)$$

Rezultă că:

$$m=n$$

şi, pentru orice k=1, 2, …, n,

$$p\cdot x_{i_k} = y_{i_k} + b_{i_k},$$

unde $b_{i_k} \in B_{i_k}$. Din aceste ultime egalităţi, rezultă că, pentru orice k=1, 2, …, n,

$$p\cdot x_{i_k} + B_{i_k} = y_{i_k} + B_{i_k}.$$

Deoarece, pentru orice $i\in I$, G_i/B_i este p-divizibil, există, pentru orice k=1, 2, …, n, un $g_{i_k} \in G_{i_k}$ astfel încât:

$$p\cdot(g_{i_k} + B_{i_k}) = y_{i_k} + B_{i_k}.$$

Însumând aceste ultime n relaţii, obţinem:

$$p\cdot(g_{i_1} + \ldots + g_{i_n} + (\bigoplus_{i\in I} B_i)) = y + (\bigoplus_{i\in I} B_i).$$

Rezultă că ecuaţia (∗) are soluţia:

$$\overline{g} = g + (\bigoplus_{i\in I} B_i),$$

unde:

$$g = g_{i_1} + \ldots + g_{i_n};$$

deci, $(\bigoplus_{i\in I} G_i)/(\bigoplus_{i\in I} B_i)$ este p-divizibil şi demonstraţia teoremei este completă. □

Vom nota în continuare cu B_G subgrupul p-bazic al grupului G. Atunci, conform lui (2.3.5.4), are loc relaţia:

$$B_{(\bigoplus_{i\in I} G_i)} = \bigoplus_{i\in I} B_{G_i}. \quad (40)$$

Şi în acest caz începem rezolvarea problemei noastre tot cu p-grupurile.

Propoziţia 2.3.5.5: *Dacă G este un p-grup cu P.I.S.D., atunci şi B_G are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Şi aici, conform cu (2.1.2.2), distingem următoarele cazuri:

Cazul 1: Există un $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$G=\mathbf{Z}(p^n).$$

Atunci:

$$B_G=G$$

are P.I.S.D..

Cazul 2: Dacă:

$$G=\mathbf{Z}(p^\infty),$$

atunci, conform cu (2.3.5.3),

$$B_G=0.$$

Cazul 3: Există un cardinal m_p astfel încât:

$$G=(\oplus_{m_p} \mathbf{Z}(p))\oplus C_p,$$

unde:

$C_p=0$ sau $C_p=\mathbf{Z}(p^\infty)$.

Atunci, conform definiţiei subgrupului p-bazic şi lui (2.3.5.4),

$$B_G=\oplus_{m_p} \mathbf{Z}(p)$$

şi, conform lui (2.1.2.1), B_G are P.I.S.D.. □

Din (2.3.5.5) obţinem:

Corolarul 2.3.5.6: *Dacă G este un grup de torsiune cu P.I.S.D., atunci şi B_G are aceeaşi proprietate.*

***Demonstraţie*:** Dacă G este un grup ca şi în enunţ, atunci:

$$G=\bigoplus_{p\in P_1} G_p,$$

unde P_1 este o mulţime de numere prime şi, pentru orice $p\in P_1$, G_p este un p-grup cu P.I.S.D., conform cu (1.1.3). Relaţia (40) implică:

$$B_G=\bigoplus_{p\in P_1} B_{G_p},$$

unde, pentru orice $p\in P_1$, B_{G_p} este un p-grup cu P.I.S.D., conform cu (2.3.5.5). Deoarece, pentru orice $p\in P_1$, B_{G_p} este un p-grup total invariant în B_G, rezultă că (1.1.2) completează demonstraţia. □

Pentru studiul subgrupurilor p-bazice ale grupurilor fără-torsiune, complet decompozabile, cu P.I.S.D., avem nevoie (şi) de următorul rezultat:

Teorema 2.3.5.7: *Fie G este un grup redus, fără-torsiune, de rang unu. Dacă* $G\neq\mathbf{Z}$*, atunci*:

$B_G=0.$

***Demonstraţie*:** Dacă G este un grup ca şi în enunţ, atunci putem presupune că G este un subgrup al lui **Q**. Deoarece rangul lui B_G este cel mult egal cu 1 şi B_G este de forma (39), rezultă că:

$B_G=0$ sau $B_G=\mathbf{Z}$.

Dacă:

$B_G=\mathbf{Z}$,

atunci **Z** este p-pur în G, adică:

$$p\mathbf{Z}=\mathbf{Z}\cap pG. \qquad (*)$$

Dacă G conţine cel puţin o fracţie cu numitorul p, atunci egalitatea (∗) nu are loc şi **Z** nu este p-pur în G. Presupunem, acum, că G nu conţine nici o fracţie raţională cu numitorul p şi că G/**Z** este p-divizibil. Atunci, pentru orice $y\in G$, ecuaţia:

$$p\cdot(x+\mathbf{Z})=y+\mathbf{Z}$$

are o soluţie $g+\mathbf{Z}\in G/\mathbf{Z}$. Deci, pentru orice $y\in G$, există un $g\in G$ astfel încât:

$$p\cdot g-y=k\in G;$$

de unde rezultă că:

$$g=\frac{y+k}{p}\in G.$$

Dacă $y\in\mathbf{Z}$, atunci G conţine o fracţie raţională g cu numitorul p, ceea ce contrazice presupunerea noastră. Aşadar **Z** nu poate fi subgrupul p-bazic al grupului G şi, deci,

$B_G=0$. □

Pentru grupuri care nu sunt de torsiune obţinem:

Corolarul 2.3.5.8: *Dacă G este un grup fără-torsiune, complet decompozabil, cu P.I.S.D., atunci şi* B_G *are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Fie G un grup fără-torsiune, complet decompozabil, cu P.I.S.D.. Atunci, conform cu (2.1.4.3), distingem, şi aici, trei cazuri:

Cazul 1: Dacă G este neredus, atunci el este de forma:

$$G=(\oplus_m\mathbf{Q})\oplus(\oplus_n C),$$

unde:

- m este un cardinal oarecare,
- n este un număr natural,

iar,

- C este un grup redus, de rang unu.

În acest caz obţinem, conform relaţiei (39), lui (2.3.5.3), (2.3.5.4) şi lui (2.3.5.7), că:

$B_G=\oplus_n B_C$,

unde:

($B_C=0$, dacă $C\neq\mathbf{Z}$) sau ($B_G=\mathbf{Z}$, dacă $C=\mathbf{Z}$).

Deci, conform lui (2.1.1.2), B_G are P.I.S.D..

Cazul 2: Grupul G este redus şi este de forma:

$G=\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{m_i} G_i)$,

unde, pentru orice $i\in I$, m_i este un cardinal oarecare, iar G_i este un grup (redus) de rang unu şi, pentru orice $i_1, i_2\in I$, $i_1\neq i_2$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt incomparabile. În acest caz, notând, ca şi în (2.2.3.6), pentru fiecare $i\in I$, cu:

$G_i^*=\oplus_{m_i} G_i$,

obţinem că:

$B_G=\bigoplus_{i\in I} B_{G_i^*}$

şi, pentru orice $i\in I$,

$B_{G_i^*}=0$.

Deci:

$B_G=0$

are (în mod trivial) P.I.S.D..

Cazul 3: Grupul G este redus şi este de forma:

$G=(\oplus_n C)\oplus(\bigoplus_{i\in I} G_i)$,

unde:

- n este un număr natural

şi,

- C este un grup (redus) de rang unu şi de tip ν,
- pentru orice $i\in I$, G_i este un grup (redus) de rang unu şi de tip μ_i, cu $\nu<\mu_i$ şi, pentru orice $i_1, i_2\in I$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt tipuri incomparabile.

Atunci, conform lui (2.3.5.4) şi lui (2.3.5.7), rezultă că:

$B_G=\oplus_n B_C$

este sau 0 sau un grup liber. Aşadar, şi în acest caz, (2.1.1.2) completează demonstraţia. □

Corolarul 2.3.5.9: *Dacă G este un grup mixt scindabil, cu P.I.S.D., atunci B_G are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Dacă G este un grup ca şi în enunţ, atunci, conform cu (2.1.5.2),

$G=T\oplus D\oplus C$,

unde:

- $T=T(G)$,
- D este subgrupul maximal divizibil (fără-torsiune) al lui G,

iar,

- C este un grup fără-torsiune, redus, cu P.I.S.D..

Atunci:

$B_G=T\oplus B_C$

are P.I.S.D.. □

Se impun aici câteva observaţii.

Observaţia 2.3.5.10: *Există grupuri divizibile G, cu*:

$B_G=0$,

fără ca G să aibă P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Contraexemplu: fie,

$G=\mathbf{Z}(p^{\infty})\oplus\mathbf{Z}(p^{\infty})$.

Atunci:

$B_G=0$

are P.I.S.D., dar G, conform lui (2.1.3.5), nu are P.I.S.D.. □

Observaţia 2.3.5.11: *Din (2.3.5.10) rezultă că reciproca lui (2.3.5.5) este, în general, falsă, adică: există p-grupuri G, cu proprietatea că B_G are P.I.S.D., fără ca G să aibă P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Contraexemplu: fie,

$G=\mathbf{Z}(p)\oplus\mathbf{Z}(p^{\infty})\oplus\mathbf{Z}(p^{\infty})$.

Atunci:

$B_G=\mathbf{Z}(p)$

are P.I.S.D., dar G, conform lui (2.1.2.2), nu are P.I.S.D.. □

Observaţia 2.3.5.12: *Din (2.3.5.7) rezultă că reciproca lui (2.3.5.8) este, în general, falsă, adică: există grupuri G, fără-torsiune, cu proprietatea că B_G are P.I.S.D., fără ca G să aibă P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Contraexemplu: fie,

$G=D\oplus(\oplus_m\mathbf{Z})$,

unde D este un grup divizibil fără-torsiune, iar m este un cardinal transfinit. Atunci:

$B_G=\oplus_m\mathbf{Z}$

are P.I.S.D., dar G, conform lui (2.1.4.2), nu are P.I.S.D.. □

Observaţia 2.3.5.13: *Din (2.3.5.8) (sau (2.3.5.10)) rezultă că reciproca lui (2.3.5.7) este, în general, falsă, adică: există grupuri mixte scindabile, cu proprietatea că B_G are P.I.S.D., fără ca G să aibă P.I.S.D..*

Demonstraţie**:** Contraexemplu: fie,

$$G=\mathbf{Z}(p^\infty)\oplus\mathbf{Z}(p^\infty)\oplus D\oplus(\oplus_m\mathbf{Z}),$$

unde D este un grup divizibil, fără-torsiune, iar m este un cardinal transfinit. Atunci:

$$B_G=\oplus_m\mathbf{Z}$$

are P.I.S.D., dar G, conform lui (2.1.5.2), nu are P.I.S.D.. □

În continuare prezentăm câteva clase de grupuri abeliene, cu P.I.S.D., pentru care grupul factor G/B_G are şi el P.I.S.D..

Propoziţia 2.3.5.14: *Fie G un grup abelian cu P.I.S.D., p - un număr prim (oarecare) şi B_G - subgrupul p-bazic al lui G. În oricare din următoarele situaţii, grupul factor G/B_G are P.I.S.D.*:

1) *G este un p-grup*;

2) *G este un grup de torsiune*;

3) *G este un grup liber*;

4) *G este un grup divizibil*;

5) *G este un grup fără-torsiune, complet decompozabil*;

6) *G este un grup mixt, neredus*.

Demonstraţie**: 1)** Din (2.3.5.5) rezultă:

<u>Cazul 1:</u> Dacă există un $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$G=\mathbf{Z}(p^n),$$

atunci,

$$B_G=G \quad \text{şi} \quad G/B_G=0$$

are, în mod trivial, P.I.S.D..

<u>Cazul 2:</u> Dacă:

$$G=\mathbf{Z}(p^\infty),$$

atunci:

$$B_G=0 \quad \text{şi} \quad G/B_G\cong G.$$

<u>Cazul 3:</u> Dacă există un cardinal m_p astfel încât:

$$G=(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))\oplus C_p,$$

unde:

$$C_p=0 \quad \text{sau} \quad C_p=\mathbf{Z}(p^\infty),$$

atunci:

$$B_G=\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p) \quad \text{şi} \quad G/B_G\cong C_p$$

are P.I.S.D..

2) Dacă G este un grup ca şi în enunţ, atunci, conform cu (2.1.2.4), el este de forma:

$$G=(\bigoplus_{p\in P_0}\mathbf{Z}(p^{n_p}))\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}C_p), \qquad (10)$$

unde:

- P_0 şi P_1 sunt submulţimi de numere prime;
- pentru orice $p\in P_0$, n_p este un număr natural nenul;
- pentru orice $p\in P_1$, m_p este un cardinal oarecare;
- $C_p=0$ sau $C_p=\mathbf{Z}(p^\infty)$.

Conform cu (2.3.5.6) şi (2.3.5.5),

$$B_G=(\bigoplus_{p\in P_0}\mathbf{Z}(p^{n_p}))\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p)).$$

Atunci:

$$G/B_G\cong\bigoplus_{p\in P_1}C_p$$

are P.I.S.D., conform lui (2.1.2.4).

3) Dacă G este un grup liber, atunci:

$B_G=G$ şi $G/B_G=0$.

4) Dacă G este divizibil, atunci:

$B_G=0$ şi $G/B_G\cong G$.

5) Dacă G este un grup ca şi în enunţ, atunci, conform cu (2.1.4.3), avem trei cazuri:

<u>Cazul 1:</u> Dacă G este neredus, atunci G este de forma:

$$G=(\oplus_m\mathbf{Q})\oplus(\oplus_n C) \qquad (13)$$

unde:

- m este un cardinal oarecare,

iar:

- n este un număr natural

şi:

- C este un grup redus, de rang unu.

Atunci, conform lui (2.3.5.7),

($B_C=0$, dacă $C\neq\mathbf{Z}$) sau ($B_C=\mathbf{Z}$, dacă $C=\mathbf{Z}$).

Rezultă că:

($B_G=0$, dacă $C\neq\mathbf{Z}$) sau ($B_G=\oplus_n C$, dacă $C=\mathbf{Z}$).

Aşadar,

($G/B_G\cong G$, dacă $C\neq\mathbf{Z}$) sau ($G/B_G\cong\oplus_m\mathbf{Q}$, dacă $C=\mathbf{Z}$).

Acum (2.1.3.1) completează demonstraţia.

Cazul 2: Dacă G este redus şi nu satisface la condiţiile de la (1.1.11), atunci G este de forma:

$$G=\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{m_i} G_i), \qquad (14)$$

unde:

- pentru orice $i\in I$, m_i este un cardinal oarecare,

şi:

- G_i este un grup (redus) de rang unu,

iar,

- pentru orice $i_1, i_2\in I$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt incomparabile.

Atunci, conform ipotezei, pentru orice $i\in I$, $G_i\neq\mathbf{Z}$. Deci, pentru orice $i\in I$,

$$B_{G_i}=0$$

şi, deci:

$$B_G=0.$$

Astfel am demonstrat că:

$$G/B_G\cong G.$$

Cazul 3: Dacă grupul G este redus şi satisface la condiţiile de la (1.1.11), atunci G este de forma:

$$G=(\oplus_n C)\oplus(\bigoplus_{i\in I} G_i), \qquad (15)$$

unde:

- n este un număr natural

şi,

- C este un grup (redus) de rang unu şi de tip ν,
- pentru orice $i\in I$, G_i este un grup (redus) de rang unu şi de tip μ_i, cu $\nu<\mu_i$

şi,

- pentru orice $i_1, i_2\in I$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt tipuri incomparabile.

Atunci, conform lui (2.3.5.8), rezultă că:

$$B_G=\oplus_n B_C$$

este sau 0 sau un grup liber. Aşadar, şi în acest caz,

$$G/B_G\cong G \qquad \text{sau} \qquad G/B_G\cong\bigoplus_{i\in I} G_i$$

are P.I.S.D..

6) Fie G un grup mixt, neredus, cu P.I.S.D. Atunci, conform cu (2.1.5.2), G este forma:

$$G=(\oplus_{m_0}\mathbf{Q})\oplus(\bigoplus_{p\in P_0}\mathbf{Z}(p^{n_p}))\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p)))\oplus(\oplus_n H), \qquad (16)$$

unde:

- m_0 este un cardinal oarecare,

iar,

- **Q** este grupul (aditiv) al numerelor raţionale;
- P_0 este o submulţime a lui P şi, pentru orice $p\in P_0$, n_p este un număr natural nenul, cel puţin egal cu 2;
- P_1 este tot o submulţime a mulţimii **P** a tuturor numerelor prime şi, pentru orice $p\in P_1$, m_p este un cardinal nenul;
- n este un număr natural;

iar,

- H este un grup fără-torsiune, redus, de rang unu şi $\mathbf{Q}\oplus H$ este total invariant în G.

Rezultă că:

$$B_G=(\bigoplus_{p\in P_0}\mathbf{Z}(p^{n_p}))\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p)))$$

şi:

$$G/B_G\cong(\oplus_{m_0}\mathbf{Q})\oplus(\oplus_n H)$$

are, conform lui (2.1.4.3), P.I.S.D.. □

Deoarece toate cazurile prezentate în (2.3.5.14) sunt de tipul:

- „*Dacă grupul G are P.I.S.D., atunci şi grupul factor G/B_G are P.I.S.D.*”,

se cuvine să facem aici următoarea observaţie:

Observaţia 2.3.5.15: *Dacă G este un grup abelian cu proprietatea că grupul factor G/B_G are P.I.S.D., nu rezultă că şi G are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Contraexemplu: fie,

$$G=(\bigoplus_{p\in P_0}G_p)\oplus D\oplus(\oplus_{m_0}\mathbf{Z})\oplus(\oplus_{m_1}C), \qquad (41)$$

unde:

- P_0 este o submulţime a mulţimii **P** a tuturor numerelor prime şi, pentru orice $p\in P_0$, G_p este un p-grup cu P.I.S.D.;
- D este un grup divizibil;
- m_0 şi m_1 sunt numere naturale nenule;
- $C\neq\mathbf{Z}$ este un grup redus, fără-torsiune, de rang unu.

Atunci G nu are P.I.S.D. (în acest sens este suficient să considerăm că D este mixt - vezi (1.2.2.2)) şi:

$$B_G=(\bigoplus_{p\in P_0^*}G_p)\oplus(\oplus_{m_0}\mathbf{Z}),$$

unde $P_0^* \subseteq P_0$ şi, pentru orice $p \in P_0^*$, G_p este un p-grup redus, cu P.I.S.D.. Rezultă că:

$$G/G_p \cong (\bigoplus_{p\in P_0 \setminus P_0^*} G_p) \oplus D \oplus (\oplus_{m_1} C)$$

are P.I.S.D.. □

2.4. GRUPURI ABELIENE CU PROPRIETATEA CĂ ORICE SUBGRUP (PROPRIU) AL LOR ARE P.I.S.D.

Din cele demonstrate în Subcapitolul 2.3 rezultă următoarele:

Observaţiile 2.4.1: *Fie G un grup abelian. Atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Dacă G are P.I.S.D., atunci nu orice subgrup al său are P.I.S.D..*

2) *Dacă orice subgrup propriu al lui G are P.I.S.D. şi G admite o descompunere (directă) în sumanzi direcţi total invarianţi, atunci G are P.I.S.D..*

3) *Dacă G are P.I.S.D., atunci nu orice grup factor al său are P.I.S.D..*

4) *Dacă orice grup factor netrivial al lui G are P.I.S.D. şi G admite o descompunere (directă) în sumanzi direcţi total invarianţi, atunci G are P.I.S.D..*

5) *Dacă B este un subgrup (propriu) al lui G, astfel încât B şi G/B au (fiecare) P.I.S.D., atunci nu rezultă că G şi are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*: 1)** Contraexemplu: fie p un număr prim,

$G = \mathbf{Z}(p) \oplus \mathbf{Z}(p^\infty)$ şi $B = \mathbf{Z}(p) \oplus C$,

unde:

$C = \langle c_2 \rangle$,

iar c_2 este un generator al lui $\mathbf{Z}(p^\infty)$, cu proprietatea că:

$p^2 \cdot c_2 = 0$;

deci:

$C \cong \mathbf{Z}(p^2)$.

Atunci, conform cu (2.1.2.2), G are P.I.S.D., dar B nu are P.I.S.D..

2) Fie G un grup cu proprietatea că orice subgrup al lui are P.I.S.D. şi fie:

$$G = \bigoplus_{i\in I} G_i$$

o descompunere directă a lui G în sumanzi direcţi total invarianţi. Atunci ipoteza şi (1.1.2) arată că şi G are P.I.S.D..

3) Contraexemplu: fie,

$G = \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$ şi $B = \mathbf{Z}$.

Atunci (2.1.4.2) arată că G şi B au P.I.S.D., dar (2.1.3.5) arată că:

$$G/B = (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \bigoplus_{p\in P} (\mathbf{Z}(p^\infty) \oplus \mathbf{Z}(p^\infty))$$

nu are P.I.S.D.; aici **P** este mulţimea tuturor numerelor prime.

4) Fie G un grup cu proprietatea că orice grup factor al lui are P.I.S.D. şi, ca şi la punctul 2), fie:

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i$$

o descompunere directă a lui G în sumanzi direcţi total invarianţi. Atunci ipoteza arată că, pentru orice $i\in I$, G_i are P.I.S.D.. Iarăşi (1.1.2) arată că şi G are P.I.S.D..

5) Contraexemplu: fie,

$$G=\mathbf{Z}(p^2)\oplus\mathbf{Z}(p^\infty)\oplus\mathbf{Z}(q^\infty),$$

unde p şi q sunt două numere prime distincte. Atunci:

$$F(G)=\mathbf{Z}(p^\infty)\oplus\mathbf{Z}(q^\infty), \qquad \text{iar} \qquad G/F(G)\cong\mathbf{Z}(p^2).$$

Conform lui (2.1.3.5) şi lui (2.1.2.2), F(G) şi G/F(G) au P.I.S.D., iar G nu are P.I.S.D. - vezi (2.1.2.4). □

Pornind de la aceste observaţii, în acest subcapitol vom determina patru clase de grupuri abeliene (de torsiune, divizibile, fără-torsiune şi mixte scindabile) care au proprietatea că orice subgrup propriu al lor are P.I.S.D.. Aceste grupuri le vom numi *grupuri cu proprietatea (P)*.

În finalul subcapitolului vom demonstra că nu există astfel de grupuri mixte.

2.4.1. Grupuri de torsiune

Începem determinarea grupurilor de torsiune cu proprietatea (P) cu determinarea p-grupurilor cu această proprietate.

Teorema 2.4.1.1: *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru un p-grup G*:

1) *G are proprietatea (P)*;
2) *G este idecompozabil sau elementar.*

***Demonstraţie*: 1)** implică **2)** Fie G un p-grup cu proprietatea că orice subgrup propriu al lui G are P.I.S.D.. Dacă G este idecompozabil, demonstraţia este gata. Aşa că presupunem că G nu este idecompozabil. Pentru început vom demonstra că G are P.I.S.D.. Presupunem că există $g\in G[p]$ astfel încât:

$$h_p(g)=k,$$

unde $1\leq k<\infty$. Atunci $g\in p^kG$ şi $g\notin p^{k+1}G$. Rezultă că există $a\in G$ astfel încât:

$$g=p^k\cdot a \qquad \text{şi} \qquad p\cdot g=0.$$

Deci:

$$o(a)=k+1$$

şi, astfel, $<a>$ este un sumand direct în G, adică:

$$G=<a>\oplus B.$$

Dacă pentru orice $b \in B[p]$, <b> este sumand direct în B, atunci B[p] este sumand direct în B. Presupunem că:

$$B=B[p]\oplus C.$$

Dar,

$$C[p]=C\cap B[p]=0;$$

deci:

$$C=0 \qquad \text{şi} \qquad B=B[p].$$

Rezultă că există un cardinal m_p astfel încât, abstracţie făcând de un izomorfism,

$$G=\mathbf{Z}(p^{k+1})\oplus(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p)).$$

În acest caz subgrupul $\mathbf{Z}(p^{k+1})\oplus\mathbf{Z}(p)$, conform lui (2.1.2.2), nu are P.I.S.D., ceea ce contrazice ipoteza. Aşadar există un $b_1 \in B[p]$ astfel încât $<b_1>$ nu este sumand direct în B. Atunci subgrupul $<a>\oplus<b_1>$ nu are P.I.S.D. şi, iarăşi, am obţinut o contradicţie cu ipoteza. Rezultă că, pentru orice $g \in G[p]$,

$$h_p(g)=0 \qquad \text{sau} \qquad h_p(g)=\infty.$$

Deci, sumanzii direcţi ai lui G sunt sau p-mărginiţi sau izomorfi cu $\mathbf{Z}(p^\infty)$. Fie Ω mulţimea sumanzilor direcţi p-mărginiţi ai lui G şi $\{A_0,A_1,\ldots,A_n,\ldots\}$ o submulţime total ordonată a lui Ω. Atunci:

$$A=<\bigcup_{i\geq 0} A_i>$$

este un subgrup al lui G şi, conform lui [65, p. 151], A este sumand direct în G. Conform Lemei lui Zorn, există în Ω un element maximal E astfel încât:

$$G=E\oplus F.$$

Presupunem că $F\neq 0$ şi considerăm $g \in F[p]$ un element oarecare. Dacă:

$$h_p^G(g)=0,$$

atunci:

$$F=<g>\oplus H$$

şi $E\oplus<g>\in\Omega$, ceea ce contrazice maximalitatea lui E. Deci, conform celor demonstrate mai sus, pentru orice $g \in F[p]$, avem că:

$$h_p^G(g)=\infty.$$

Dar, atunci, abstracţie făcând de un izomorfism, F este o sumă directă de exemplare de $\mathbf{Z}(p^\infty)$. Conform ipotezei şi lui (1.1.5), rezultă că:

$$F=\mathbf{Z}(p^\infty)$$

şi G este un p-grup cu P.I.S.D.. Deci, există un cardinal m_p astfel încât:

$$G=(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))\oplus\mathbf{Z}(p^\infty).$$

Presupunem că:

$\mathbf{Z}(p^\infty)=<c_1,c_2,\ldots,c_n,\ldots>$,

cu relaţiile:

$p\cdot c_1=0,\qquad p\cdot c_2=c_1,\qquad \ldots,\qquad p\cdot c_n=c_{n-1},\qquad \ldots$

şi considerăm, de asemenea, şi subgrupul:

$K=\mathbf{Z}(p)\oplus<c_2>$.

Atunci subgrupul K nu are P.I.S.D., iarăşi contrazicem ipoteza. În concluzie:

$F=0$

şi G este elementar.

2) implică **1)** Dacă G este ca şi în enunţ, atunci:

i) $G=\mathbf{Z}(p^n)$, (42)

sau:

ii) $G=\mathbf{Z}(p^\infty)$, (43)

sau:

iii) $G=\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p)$, (44)

unde $n\in\mathbf{N}^*$, $2\leq n<\infty$, iar m_p este un cardinal oarecare. Dacă G este de forma (42) sau de forma (43), atunci orice subgrup al lui G este idecompozabil, deci are, în mod trivial, P.I.S.D.. Dacă G este de forma (44), atunci orice subgrup al lui G este tot de aceeaşi formă, deci are P.I.S.D.. □

Din demonstraţia teoremei de mai sus rezultă următoarele observaţii:

Observaţiile 2.4.1.2: 1) *Dacă G este un p-grup cu P.I.S.D., atunci nu orice subgrup al lui G are aceeaşi proprietate*.

2) *p-grupurile cu proprietatea (P) coincid cu cele cu P.I.S.D. cu această proprietate.* □

Acum putem prezenta structura grupurilor de torsiune cu proprietatea (P).

Corolarul 2.4.1.3: *Dacă G este un grup de torsiune, atunci următorele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *G are proprietatea (P)*;
2) *G este de forma*:

$$G=\left(\bigoplus_{p\in P_1}A_p\right)\oplus\left(\bigoplus_{p\in P_2}B_p\right)\oplus\left(\bigoplus_{p\in P_3}C_p\right),\qquad (45)$$

unde:

- *P_1, P_2 şi P_3 sunt submulţimi ale mulţimii **P** a tuturor numerelor prime astfel încât*:

  $P_1\cap P_2=P_2\cap P_3=P_3\cap P_1=\varnothing$;
- *pentru orice $p\in P_1$, A_p este un p-grup divizibil idecompozabil*;
- *pentru orice $p\in P_2$, B_p este un p-grup p-mărginit*;
- *pentru orice $p\in P_3$, C_p este un p-grup (redus) idecompozabil, neelementar.*

***Demonstraţie*: 1)** implică **2)** Fie:

$$G=\bigoplus_{p\in P} G_p$$

un grup de torsiune, descompus în p-componentele sale. Conform ipotezei, pentru orice $p\in\mathbf{P}$, orice subgrup propriu al lui G_p are P.I.S.D.. Deci, pentru orice $p\in\mathbf{P}$, G_p este de forma (42), (43) sau (44), iar G este de forma (45).

2) implică **1)** Reciproc, fie G un grup de forma (45) şi B un subgrup oarecare al lui G. Atunci:

$$B=\bigoplus_{p\in P} B_p,$$

unde, pentru orice $p\in\mathbf{P}$,

$$B_p=B\cap G_p,$$

iar G_p este p-componenta lui G. Deoarece, pentru orice $p\in\mathbf{P}$, B_p satisface la condiţiile de la (2.4.1.1), rezultă că, pentru orice $p\in\mathbf{P}$, B_p are P.I.S.D.. Atunci (1.1.2) arată că subgrupul B are P.I.S.D. şi G are proprietatea (P). □

Din cele demonstrate mai sus şi (2.4.1)1), 2) obţinem:

Observaţiile 2.4.1.4: 1) *Dacă G este un grup de torsiune cu P.I.S.D., atunci nu orice subgrup propriu al lui G are aceeaşi proprietate.*

2) *Grupurile de torsiune care au proprietatea (P) coincid cu cele cu P.I.S.D. cu această proprietate.* □

2.4.2. Grupuri divizibile

Trecem acum la determinarea grupurilor divizibile cu proprietatea (P). În acest sens avem următorul rezultat:

Propoziţia 2.4.2.1: *Dacă G este un grup divizibil, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *G are proprietatea (P)*;

2) *G are una din următoarele forme*:

$$G=\boldsymbol{Q}, \tag{46}$$

sau:

$$G=\boldsymbol{Q}\oplus\boldsymbol{Q}, \tag{47}$$

sau:

$$G=\bigoplus_{p\in P_1} \boldsymbol{Z}(p^{\infty}). \tag{48}$$

***Demonstraţie*: 1)** implică **2)** Fie:

$$G=(\oplus_{m_0}\mathbf{Q})\oplus(\bigoplus_{p\in P_1} D_p)$$

un grup divizibil, unde:

- **Q** este grupul aditiv al numerelor raţionale;
- m_0 este rangul fără-torsiune al lui G;
- P_1 este o submulţime a tuturor numerelor prime şi, pentru orice $p \in P_1$, D_p este un p-grup divizibil.

Conform ipotezei şi lui (2.1.3.5),

$$G=\oplus_{m_0}\mathbf{Q} \qquad \text{sau} \qquad G=\bigoplus_{p\in P} D_p.$$

Presupunem că:

$$G=\oplus_{m_0}\mathbf{Q}$$

şi $m_0 \geq 3$. În acest caz considerăm subgrupul:

$$B=\mathbf{Q}\oplus E\oplus F,$$

unde E şi F sunt subgrupuri (proprii) ale lui **Q**, astfel încât t(E) şi t(F) sunt incomparabile. Atunci (2.1.4.2) arată că B nu are P.I.S.D.. Rezultă că dacă G este fără-torsiune, atunci el este de forma (46) sau de forma (47).

***Altfel*:** Conform lui (2.4.3.6), $\mathbf{Q}\oplus\mathbf{Q}$ are un subgrup idecompozabil H, de rang 2. Atunci (2.4.3.11) arată că grupul $\mathbf{Q}\oplus H$ nu are proprietatea (P).

Acum, presupunem că G este de torsiune. Conform ipotezei şi lui (2.1.3.5), G este de forma (48).

2) implică **1)** Dacă:

$$G=\mathbf{Q},$$

atunci orice subgrup al lui G este idecompozabil, deci are P.I.S.D.. Dacă G este de forma (47), atunci orice subgrup al lui G este (vezi (2.4.3)) sau idecompozabil, sau complet decompozabil, de rang $r \leq 2$. În acest caz (2.1.4.3) completează demonstraţia. Dacă G este de torsiune, deci de forma (48), şi B este un subgrup al lui G, atunci, judecând ca şi la (2.4.1.3), obţinem că:

$$B=\bigoplus_{p\in P} B_p,$$

unde, pentru orice $p \in \mathbf{P}$, B_p este un subgrup al lui $\mathbf{Z}(p^{\infty})$. Rezultă că, pentru orice $p \in \mathbf{P}$, B_p are P.I.S.D.. Iarăşi (1.1.2) arată că B are P.I.S.D.. □

Din (2.4.2.1) şi (2.1.3.5) obţinem:

Observaţiile 2.4.2.2: ***1)*** *Dacă G este un grup divizibil cu P.I.S.D., atunci nu orice subgrup al lui G are aceeaşi proprietate.*

2) *Grupurile divizibile care au proprietatea că orice subgrup propriu al lor are P.I.S.D. coincid cu cele cu P.I.S.D. cu această proprietate.* □

2.4.3. Grupuri fără-torsiune

Înainte de a trece la determinarea grupurilor fără-torsiune cu proprietatea (P), prezentăm câteva rezultate referitoare la structura subgrupurilor idecompozabile ale unor grupuri fără-torsiune. În acest sens vom folosi notaţiile clasice:

- ***P*** - pentru mulţimea tuturor numerelor prime,
- *r(G)* - pentru rangul grupului G,
- *t(G)* - pentru tipul grupului G.

Conform cu [23, 27.4] dacă un grup G este idecompozabil, atunci el este sau fără-torsiune sau cociclic. Deoarece cazul grupurilor cociclice (deci al grupurilor de torsiune) este cunoscut, aici ne vom referi doar la grupurile fără-torsiune. În acest sens, peste tot în această secţiune prin grup vom înţelege grup fără-torsiune.

Fie G un grup de rang r şi:

$$L=\{x_i\}_{i\in I}$$

un sistem maximal independent în G, I fiind o mulţime de indici cu:

$$|I|=r.$$

Atunci:

$$<L>=\bigoplus_{i\in I}<x_i>.$$

Pentru orice $i\in I$, notăm cu X_i subgrupul pur al lui G, generat de $\{x_i\}$. Atunci, pentru fiecare $i\in I$, subgrupul X_i este omogen, de rang unu şi fie:

$$t(X_i)=t(x_i)=t_i.$$

Aşadar orice grup de rang r are un subgrup complet decompozabil de acelaşi rang cu el. De aceea studiul nostru se va referi doar la grupurile complet decompozabile.

Pentru început avem:

Teorema 2.4.3.1: *Fie*,

$$G=\bigoplus_{i\in I}G_i$$

un grup fără-torsiune cu următoarele proprietăţi:

1) *I este o mulţime de indici cel mult numărabilă*;
2) *Pentru orice $i\in I$, G_i este un grup redus, cu*:

   $$r(G_i)=1;$$

3) *Există o mulţime cel mult numărabilă*:

   $$P_0=\{p_1,p_2,\dots,p_n,\dots\}$$

   de numere prime distincte, cu următoarele proprietăţi:

   a) *eventual după o altă indexare, pentru orice $p_k\in P_0$ există un $g_k\in G_k$ astfel încât*:

$h_{p_k}^{G_k}(g_k)=\infty$,

b) *pentru orice* $p_k \in P_0$*, există* $p_{l_k} \in \mathbf{P}\setminus\{p_k\}$ *pentru care există un* $\overline{g}_k \in G_k$ *cu:*

$h_{p_{l_k}}^{G_k}(\overline{g}_k)=1$.

Atunci G are un subgrup idecompozabil A cu:

$r(A)=|P_0|$.

Demonstrație: Fie G un grup ca şi în enunţ. Pentru orice $p_k \in P_0$, considerăm grupurile:

$E_{p_k}=\langle p_k^{-\infty}\cdot g_k\rangle$ şi $H_{p_k}=\langle p_k^{-\infty}\cdot g_k, p_{l_k}^{-1}\cdot\overline{g}_k\rangle$,

unde $p_{l_k}\in\mathbf{P}\setminus\{p_k\}$. Atunci, pentru orice $p_k \in P_0$, E_{p_k} este un subgrup de indice finit al lui H_{p_k} şi:

$r(E_{p_k})=1$.

Fie:

$$A=\langle \bigoplus_{p_k\in P_0} E_{p_k}, p_{l_1}^{-1}\cdot\overline{g}_1+p_{l_2}^{-1}\cdot\overline{g}_2, p_{l_1}^{-1}\cdot\overline{g}_1+p_{l_3}^{-1}\cdot\overline{g}_3,\ldots, p_{l_1}^{-1}\cdot\overline{g}_1+p_{l_n}^{-1}\cdot\overline{g}_n,\ldots\rangle.$$

Desigur că $A\le \bigoplus_{p_k\in P_0} H_{p_k} \le \bigoplus_{i\in I} G_i$ şi nici un g_k şi nici un $\overline{g}_k$ nu se divide cu p_{l_k} în A.

(*) Deoarece, pentru orice $p_k \in P_0$, toate elementele lui E_{p_k} sunt divizibile cu orice putere a lui p_k, iar, pentru orice $p_s\in P_0\setminus\{p_k\}$, singurul element al lui E_{p_s} cu această proprietate este 0, rezultă că, pentru orice $p_k \in P_0$, E_{p_k} este total invariant în A. Pe de altă parte, deoarece, pentru orice $p_k \in P_0$, elementele g_k şi $\overline{g}_k$ sunt dependente, rezultă că H_{p_k}/E_{p_k} este de torsiune. Atunci rezultă că şi $(\bigoplus_{p_k\in P_0} H_{p_k})/(\bigoplus_{p_k\in P_0} E_{p_k})$ este tot un grup de torsiune. Deci, conform lui [42, p. 97], rezultă că subgrupul $\bigoplus_{p_k\in P_0} E_{p_k}$ este esenţial în A. (**) Vom demonstra că A este idecompozabil. În acest sens, presupunem că:

$A=B\oplus C$.

Atunci, conform lui [41, 9.3], pentru orice $p_k \in P_0$,

$E_{p_k}=(E_{p_k}\cap B)\oplus(E_{p_k}\cap C)$.

Deoarece fiecare E_{p_k} este idecompozabil, rezultă că, pentru orice $p_k \in P_0$,

$E_{p_k}\cap B=0$ sau $E_{p_k}\cap C=0$.

Deci, pentru orice $p_k \in P_0$, $E_{p_k}\subseteq B$ sau $E_{p_k}\subseteq C$. Presupunem că există $k\neq 1$ astfel încât $E_{p_1}\subseteq B$ şi $E_{p_k}\subseteq C$. În acest caz, considerăm elementul:

$$p_{l_1}^{-1}\cdot\overline{g}_1+p_{l_k}^{-1}\cdot\overline{g}_k=b+c,$$

cu $b\in B$ şi $c\in C$. Rezultă că:

$$p_{l_k}\cdot\overline{g}_1+p_{l_1}\cdot\overline{g}_k=p_{l_1}\cdot p_{l_k}\cdot(b+c),$$

adică:

$$p_{l_k}\cdot(\overline{g}_1-p_{l_1}\cdot b)=p_{l_1}\cdot(\overline{g}_k-p_{l_k}\cdot c).$$

Deoarece există numerele naturale nenule m_1, m_k astfel încât $m_1\cdot\overline{g}_1\in E_{p_1}$ şi $m_k\cdot\overline{g}_k\in E_{p_k}$, înmulţind ultima egalitate cu $m_1\cdot m_k$ şi ţinând cont de faptul că A este fără-torsiune, obţinem că:

$$\overline{g}_1-p_{l_1}\cdot b=\overline{g}_k-p_{l_k}\cdot c=0,$$

ceea ce, conform afirmaţiei $(*)$, este imposibil. Aşadar, pentru orice $p_k\in P_0$,

$(E_{p_k}\subseteq B$, caz în care $C=0)$ sau $(E_{p_k}\subseteq C$, caz în care $B=0)$,

conform afirmaţiei $(**)$. Rezultă că A este idecompozabil şi deoarece:

$$r(A)=|P_0|,$$

teorema este complet demonstrată. □

O primă consecinţă a lui (2.4.3.1) este:

Corolarul 2.4.3.2: *Dacă,*

$$G=\bigoplus_{i\in I}G_i$$

este un grup ce satisface la (2.4.3.1) şi mulţimile I şi P_0 sunt echipotente, atunci G are subgrupuri idecompozabile de orice rang $m\leq r(G)$. □

Acum obţinem o generalizare a Exemplului 2 din [42, p. 123]:

Corolarul 2.4.3.3: *Fie,*

$$G=\bigoplus_{i\in I}G_i$$

un grup ce satisface la (2.4.3.1). Dacă există $q\in\boldsymbol{P}\setminus P_0$ astfel încât în condiţia 3)b) a lui (2.4.3.1) fiecare p_{l_k} poate fi înlocuit cu q, atunci G are subgrupuri idecompozabile de orice rang $m\leq|P_0|$.

***Demonstraţie*:** Folosind notaţiile din (2.4.3.1), pentru fiecare cardinal $m\leq|P_0|$, considerăm subgrupul (lui G):

$$A_m=<\bigoplus_{p_k\in P_0^{(m)}}E_{p_k},q^{-1}\cdot(\overline{g}_1+\overline{g}_2),q^{-1}\cdot(\overline{g}_1+\overline{g}_3),\ldots,q^{-1}\cdot(\overline{g}_1+\overline{g}_m)>,$$

unde $P_0^{(m)}$ este o submulţime de cardinal m a lui P_0. Folosind acelaşi raţionament ca şi la demonstraţia lui (2.4.3.1) obţinem că A este idecompozabil. □

Alte consecinţe ale lui (2.4.3.1) sunt:

Corolarul 2.4.3.4: *Fie,*

$$G=\bigoplus_{p\in P} G_p$$

un grup fără-torsiune cu următoarele proprietăţi:

1) *Pentru orice $p\in \mathbf{P}$, G_p este un grup p-divizibil şi:*

$$r(G_p)=1;$$

2) *Pentru orice $p\in \mathbf{P}$, există un $q_p\in \mathbf{P}\setminus\{p\}$ pentru care G_p nu este q_p divizibil.*

Atunci G are subgrupuri idecompozabile de orice rang $m\leq r(G)$.

***Demonstraţie*:** Fie G un grup ca şi în enunţ. Conform condiţiei 1), pentru orice $p\in\mathbf{P}$, există un $g_p\in G_p$ astfel încât:

$$h_p^{G_p}(g_p)=\infty.$$

Din condiţia 2) rezultă că, pentru orice $p\in\mathbf{P}$, există un $q_p\in\mathbf{P}\setminus\{p\}$ pentru care există un $\overline{g}_p\in G_p$ astfel încât:

$$h_{q_p}^{G_p}(\overline{g}_p)=1.$$

Deci putem aplica (2.4.3.1) şi (2.4.3.2).

***Altfel*:** Deoarece,

$$r(G_p)=1$$

şi G_p este p-divizibil, rezultă că g_p şi $\overline{g}_p$ sunt liniar dependente şi:

$$h_p^{G_p}(\overline{g}_p)=\infty.$$

Acum, pentru orice $p_k\in\mathbf{P}$, considerăm grupurile:

$$E_{p_k}=\langle p_k^{-\infty}\cdot g_{p_k}\rangle \quad \text{şi} \quad H_{p_k}=\langle p_k^{-\infty}\cdot g_{p_k}, q_{p_k}^{-1}\cdot g_{p_k}\rangle.$$

Atunci, pentru orice $p_k\in\mathbf{P}$, E_{p_k} este un subgrup de indice q_{p_k} al lui H_{p_k} şi:

$$r(E_{p_k})=1.$$

Pentru fiecare cardinal $m\leq r(G)$, considerăm subgrupul:

$$A_m=\langle \bigoplus_{p_k\in P^{(m)}} E_{p_k}, q_{p_1}^{-1}\cdot g_{p_1}+q_{p_2}^{-1}\cdot g_{p_2}, q_{p_1}^{-1}\cdot g_{p_1}+q_{p_3}^{-1}\cdot g_{p_3},\ldots, q_{p_1}^{-1}\cdot g_{p_1}+q_{p_m}^{-1}\cdot g_{p_m}\rangle,$$

unde $P^{(m)}$ este o submulţime de cardinal m a lui **P**. Folosind acelaşi raţionament ca şi la demonstraţia lui (2.4.3.1), obţinem că A_m este idecompozabil. □

Corolarul 2.4.3.5: *Pentru orice $p\in\mathbf{P}$, considerăm grupul $\mathbf{Q}^{(p)}$ al numerelor raţionale al căror numitor este o putere a lui p. Atunci grupul:*

$$G=\bigoplus_{p\in P}\mathbf{Q}^{(p)}$$

are subgrupuri idecompozabile de orice rang $m \leq r(G)$.

***Demonstraţie*:** Pentru orice $p \in \mathbf{P}$,

$$t(\mathbf{Q}^{(p)})=(0,\ldots,0,\infty,0,\ldots),$$

unde semnul ∞ apare pe poziţia corespunzătoare lui p. Deci, grupul G satisface la condiţiile lui (2.4.3.4). □

Corolarul 2.4.3.6: *Dacă P este mulţimea tuturor numerelor prime şi I este o mulţime de indici, cu proprietatea că $|I| \leq |\mathbf{P}|$, atunci grupul:*

$$\mathbf{Q}^*=\oplus_I \mathbf{Q}$$

are subgrupuri idecompozabile de orice rang $m \leq |I|$. □

Din (2.4.3.3) rezultă:

Corolarul 2.4.3.7: *Fie G un grup redus, fără-torsiune, de rang 1, I o mulţime cel mult numărabilă de indici şi:*

$$G^*=\oplus_I G.$$

Dacă există o mulţime:

$$P_0=\{p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots\}$$

de numere prime distincte cu proprietatea că, pentru orice $p_k \in P_0$ există $g_k \in G$ (nu neaparat distincte) astfel încât:

$$h^G_{p_k}(g_k)=\infty,$$

şi există $q \in \mathbf{P} \setminus P_0$ astfel încât există $\overline{g}_k \in G$ cu:

$$h^G_q(\overline{g}_k)=1,$$

atunci G^* are subgrupuri idecompozabile de orice rang $m \leq |P_0|$. □

Se observă că în toate cazurile de mai sus apare o condiţie fundamentală:

- *sumanzii direcţi ai grupului G să aibă elemente de p-înălţime infinită, pentru diferite numere prime p.*

În continuare această condiţie va fi înlocuită cu alta:

- *existenţa unui sistem rigid în grupul G.*

Reamintim acest concept.

Definiţie: *O familie $(M_k)_{k \in K}$ de **R**-module (grupuri abeliene) se numeşte sistem rigid de **R**-module (grupuri abeliene) dacă, pentru orice $i, j \in K$, $i \neq j$,*

$$Hom(M_i,M_j)=0.$$

Pentru început generalizăm [42, 88.3], astfel:

Teorema 2.4.3.8: *Fie $\{H_i \mid i \in I\}$ o familie de grupuri fără-torsiune, astfel încât, pentru orice $i \in I$, există $G_i \leq H_i$, unde $\{G_i \mid i \in I\}$ este un sistem rigid de grupuri, cu proprietatea că există o mulţime:*

$$P_0=\{p_i \mid i \in I\}$$

de numere prime (nu neaparat distincte) astfel încât, pentru orice $p_i \in P_0$, există $g_i \in G_i$ care nu se divide cu p_i în G_i. Atunci grupul:

$$H = \bigoplus_{i \in I} H_i$$

are subgrupuri idecompozabile de orice rang $m \leq | I |$.

Demonstraţie: Fie m un cardinal oarecare, $m \leq | I |$ şi $I^{(m)}$ o submulţime de cardinal m a lui I. Conform ipotezei, pentru orice $i \in I$, există un $p_i \in P_0$ pentru care există $g_i \in G_i$ care nu se divide cu p_i în G_i. Acum, pentru fiecare cardinal $m \leq | I |$, considerăm subgrupul:

$$A_m = < \bigoplus_{i_j \in I^{(m)}} G_{i_j}, p_{i_1}^{-1} \cdot g_{i_1} + p_{i_2}^{-1} \cdot g_{i_2}, p_{i_1}^{-1} \cdot g_{i_1} + p_{i_3}^{-1} \cdot g_{i_3}, \ldots, p_{i_1}^{-1} \cdot g_{i_1} + p_{i_m}^{-1} \cdot g_{i_m} >$$

al lui H. Atunci, pentru orice $p_i \in P_0$, g_i nu se divide cu p_i în A_m. Deoarece $\{G_i \mid i \in I\}$ este un sistem rigid de grupuri, pentru orice $i \in I$, G_i este total invariant în H şi în orice subgrup A_m care îl conţine. Presupunem că:

$$A_m = B_m \oplus C_m.$$

Atunci, pentru orice $i_j \in I^{(m)}$,

$$G_{i_j} = (G_{i_j} \cap B_m) \oplus (G_{i_j} \cap C_m).$$

Deoarece fiecare G_{i_j} este idecompozabil, rezultă că, pentru orice $i_j \in I^{(m)}$,

$(G_{i_j} = G_{i_j} \cap B_m = 0)$ sau $(G_{i_j} \cap C_m = 0)$.

Deci, pentru orice $i_j \in I^{(m)}$,

$G_{i_j} \subseteq B_m$, sau $G_{i_j} \subseteq C_m$.

Presupunem că există $j \neq 1$ astfel încât $G_{i_1} \subseteq B_m$ şi $G_{i_j} \subseteq C_m$. În acest caz, considerăm elementul:

$$p_{i_1}^{-1} \cdot g_{i_1} + p_{i_j}^{-1} \cdot g_{i_j} = b_m + c_m,$$

cu $b_m \in B_m$ şi $c_m \in C_m$. Rezultă că $p_{i_1} | g_{i_1}$ şi $p_{i_j} | g_{i_j}$ în A_m, ceea ce, conform ipotezei, este imposibil. Aşadar, pentru orice $i_j \in I^{(m)}$,

$(G_{i_j} \subseteq B_m$, caz în care $C_m = 0)$ sau $(G_{i_j} \subseteq C_m$, caz în care $B_m = 0)$,

deoarece $\bigoplus_{i_j \in I^{(m)}} G_{i_j}$ este esenţial în A_m (în acest sens se poate verifica imediat că $A_m / (\bigoplus_{i_j \in I^{(m)}} G_{i_j})$ este de torsiune). Rezultă că A_m este idecompozabil şi deoarece:

$$r(A_m) = | I^{(m)} |,$$

teorema este complet demonstrată. □

O consecinţă imediată a lui (2.4.3.8) este:

Corolarul 2.4.3.9: *Fie* $\{H_i \mid i\in I\}$ *o familie de grupuri fără-torsiune, astfel încât, pentru orice* $i\in I$, *există* $G_i \leq H_i$, *unde* $\{G_i \mid i\in I\}$ *este o familie de grupuri reduse, de rang unu, cu proprietatea că, pentru orice* $i_1, i_2\in I$, $i_1\neq i_2$, $t(G_{i_1})$ *şi* $t(G_{i_2})$ *sunt incomparabile. Atunci grupul*:

$$H=\bigoplus_{i\in I} H_i$$

are subgrupuri idecompozabile de orice rang $m\leq |I|$.

***Demonstraţie*:** Conform ipotezei, $\{G_i \mid i\in I\}$ este un sistem rigid de grupuri şi există o mulţime:

$$P_0=\{p_i \mid i\in I\}$$

de numere prime (nu neaparat distincte) astfel încât, pentru orice $p_i\in P_0$, există $g_i\in G_i$ cu:

$$h_{p_i}^{H_i}(g_i)=1$$

şi care nu se divide cu p_i în G_i. Deoarece:

$$|I|=r(\bigoplus_{i\in I} G_i),$$

enunţul rezultă din (2.4.3.8). □

Fie:

$$G=B\oplus C$$

un grup oarecare şi A un subgrup (oarecare) al lui G. Atunci, conform cu [41, p. 44], există $B_2\leq B_1\leq B$ şi există $C_2\leq C_1\leq C$ astfel încât $B_2\oplus C_2$ şi, respectiv $B_1\oplus C_1$ reprezintă sumele directe maximală inclusă în A, respectiv minimală ce conţine pe A, cu componente în B, respectiv C. Deci $B_2\oplus C_2\leq A\leq B_1\oplus C_1$ şi se verifică imediat că A este suma subdirectă a lui B_1 şi C_1 şi având nucleele B_2, respectiv C_2. Atunci, conform cu [41, p. 43, 44], au loc relaţiile:

$$A/(B_2\oplus C_2)\cong B_1/B_2\cong C_1/C_2, \tag{49}$$

$$(B_1\oplus C_1)/A\cong A/(B_2\oplus C_2), \tag{50}$$

$$A/B_2\cong C_1, \tag{51}$$

$$A/C_2\cong B_1. \tag{52}$$

Se impune aici o observaţie:

Observaţia 2.4.3.10: *Fie*:

$$G=B\oplus C$$

un grup oarecare şi A un subgrup (oarecare) al lui G. Dacă C este liber şi A este idecompozabil, atunci:

$$r(A)=1 \qquad \text{sau} \qquad A\subseteq B.$$

***Demonstraţie*:** Conform ipotezei, păstrând notaţiile de mai sus, C_1 este liber. În acest caz, relaţia (51) şi [41, 2.14.4], arată că B_2 este sumand direct în A. Deoarece A este idecompozabil, rezultă că:

($B_2=0$, caz în care $r(A)=1$)   sau   ($B_2=A$, caz în care $A\subseteq B$). □

Presupunem acum că:

$G=B\oplus C$

este un grup fără-torsiune, cu:

$r(B)=r(C)=1$

şi A este un subgrup oarecare al lui G, cu:

$r(A)=1$.

Atunci, conform relaţiilor (48),

$B_2=0$ dacă şi numai dacă $C_2=0$;

în acest caz, conform condiţiei (50),

$(B_1\oplus C_1)/A\cong A$

- ceea ce este imposibil, căci $(B_1\oplus C_1)/A$ este de torsiune, iar A este fără-torsiune. Aşadar $B_2\neq 0$ şi $C_2\neq 0$. Pe de altă parte,

$B_1=B_2$ are loc exact dacă $C_1=C_2$

(vezi relaţiile (49)) şi, în acest caz,

$A=B_2\oplus C_2$.

Desigur că $B_2\oplus C_2$ este esenţial în A (deoarece $A/(B_2\oplus C_2)$ este de torsiune) şi:

$B_2=B\cap A$,   iar $C_2=C\cap A$.

Rezultă că dacă B_2 este un subgrup propriu al lui B_1, atunci şi C_2 este un subgrup propriu al lui C_1 şi:

$$A=\langle B_2\oplus C_2,a_1,a_2,\dots\rangle \qquad (53)$$

unde, pentru orice $i=1, 2, \dots$, există $b_1^i\in B_1\backslash\{0\}$ şi există $c_1^i\in C_1\backslash\{0\}$ astfel încât:

$a_i=b_1^i+c_1^i$.

Acum putem prezenta structura subgrupurilor idecompozabile ale grupurilor complet decompozabile de rang 2.

Teorema 2.4.3.11: *Fie,*

$G=B\oplus C$

un grup fără-torsiune, cu:

$r(B)=r(C)=1$

şi A un subgrup oarecare, de forma (53), al lui G. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) *A este idecompozabil*;

2) ***a)*** *pentru orice* $a_i \in A\setminus(B_2\oplus C_2)$, *există* $b_2^i \in B_2\setminus\{0\}$ *şi* $c_2^i \in C_2\setminus\{0\}$ *şi există* p_2^i *şi* q_2^i *numere prime (nu neaparat distincte) astfel încât* b_2^i *nu se divide cu* p_2^i *în* B_2, c_2^i *nu se divide cu* q_2^i *în* C_2 *şi*:

$$a_i=(p_2^i)^{-1}\cdot b_2^i+(q_2^i)^{-1}\cdot c_2^i;$$

b) *subgrupurile* B_2 *şi* C_2 *sunt total invariante în A*.

***Demonstraţie*:** Conform lui (2.4.3.8) este suficient să demonstrăm doar că **1)** implică **2)**. Fie:

$$A=<B_2\oplus C_2,b_1+c_1,b_2+c_2,\ldots>$$

un subgrup de forma (53), al lui G, unde $b_1, b_2, \ldots\in B\setminus B_2$, iar $c_1, c_2, \ldots\in C\setminus C_2$. Conform ipotezei, B_2 şi C_2 sunt reduse şi nu sunt pure în B, respectiv C. Fie p un număr prim şi $b+c+(B_2\oplus C_2)$ un element de ordin p din $A/(B_2\oplus C_2)$. Atunci:

$$p\cdot b=x\in B_2 \qquad \text{şi} \qquad p\cdot c=y\in C_2.$$

Dacă x se divide cu p în B_2, atunci $b\in B_2$, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că x nu se divide cu p în B_2 şi:

$$b=p^{-1}\cdot x.$$

Analog se arată că are loc egalitatea:

$$c=p^{-1}\cdot y.$$

Dacă $b+c+(B_2\oplus C_2)$ este un element de ordin p^r, cu $r\geq 2$, atunci judecăm analog şi afirmaţia a) de la punctul 2) este complet demonstrată.

Pentru demonstraţia celei de a doua afirmaţii de la punctul 2) distingem două cazuri:

Cazul 1: Presupunem că $t(B_2)$ şi $t(C_2)$ sunt incomparabile. În acest caz nu mai avem ce demonstra.

Cazul 2: Presupunem că $t(B_2)\leq t(C_2)$. În acest caz există un monomorfism:

$$f : B_2 \to C_2;$$

deci:

$$B_2\cong f(B_2)=B_2^*\leq C_2.$$

Considerăm grupul:

$$A^*=<B_2^*\oplus C_2, a_1^*, a_2^*,\ldots>,$$

unde, pentru orice i=1, 2, …

$$a_i^*=(p_2^i)^{-1}\cdot(b_2^i)^*+(q_2^i)^{-1}\cdot c_2^i,$$

iar:

$$(b_2^i)^*=f(b_2^i)\in B_2^*;$$

de asemenea, considerăm subgrupul:

$C_3=<C_2, a_1^*, a_2^*, \ldots>$

al lui A^*. Se observă că, pentru orice i=1, 2, … există $n_i \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $n_i \cdot a_i^* \in C_2$. Vom demonstra că:

$A^*= B_2^* \oplus C_3$.

Desigur că:

$A^*= B_2^* + C_3$.

Fie $a^* \in A^*$ un element oarecare. Presupunem că există $x^*, y^* \in A^*$ şi există $u, v \in C_2$, astfel încât:

$a^*=x^*+u+a_i^*=y^*+v+a_j^*$.

Fie $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $n \cdot (a_j^* - a_i^*) \in C_2$. Atunci:

$n \cdot (x^*-y^*)=n \cdot (u-v)+n \cdot (a_j^* - a_i^*)=0$.

Deoarece G este fără-torsiune, rezultă că:

$x^*=y^*$ şi $u+a_i^*=v+a_j^*$,

adică a^* are o reprezentare unică de forma b^*+c, cu $b^* \in B_2^*$ şi $c \in C_3$. Deci:

$A^*= B_2^* \oplus C_3$

şi, deoarece:

$A \cong A^*$,

rezultă că A este complet decompozabil, ceea ce contrazice ipoteza. Aşadar, are loc numai Cazul 1. Acum teorema este complet demonstrată. □

Din (2.4.3.10) sau (2.4.3.11) obţinem:

Corolarul 2.4.3.12: *Oricare ar fi B un grup fără-torsiune de rang unu, grupul*:

$G=B \oplus \mathbf{Z}$

nu are subgrupuri idecompozabile de rang 2.

***Demonstraţie*:** Dacă G este un grup ca şi în enunţ, atunci nu există nici o sumă directă în G, care să fie formată din sumanzi direcţi total invarianţi. Acum enunţul rezultă din (2.4.3.11). □

Acum putem determina grupurile fără-torsiune cu proprietatea (P). Începem cu următorul rezultat elementar:

Observaţia 2.4.3.13: *Dacă G este un grup liber, atunci orice subgrup al lui G are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Deoarece orice subgrup al unui grup liber este tot un grup liber, (2.1.1.2) completează demonstraţia. □

Propoziţia 2.4.3.14: *Fie,*

$G=D\oplus F$,

unde D≠0 este divizibil şi F este liber. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) *Grupul G are proprietatea (P);*

2) *F este de rang finit şi:*

$r(D)=1$.

***Demonstraţie*: 1)** implică **2)** Fie:

$G=D\oplus F$,

unde D≠0 este divizibil şi F este liber. Conform ipotezei şi lui (2.1.4.2), rezultă că F este de rang finit. Dacă r(D)≥2, atunci fie B şi C subgrupuri ale lui D, astfel încât t(**Z**)<t(B)<t(C) şi:

$K=\mathbf{Z}\oplus B\oplus C$.

Atunci K este un subgrup al lui G, care, conform lui (2.1.4.3), nu are P.I.S.D.. Rezultă că r(D)≤1.

***Altfel*:** Dacă r(D)≥2, atunci, conform lui (2.4.3.9), D are un subgrup idecompozabil, de rang 2 şi de forma (53),

$A=<B\oplus C,a_1,a_2,\ldots>$

unde:

- B şi C sunt de rang unu şi de tipuri incomparabile;
- pentru orice p-număr prim, orice element din A este de p-înălţime finită;
- pentru orice i=1, 2, … , există $b_1^i \in B\setminus\{0\}$ şi există $c_1^i \in C\setminus\{0\}$ astfel încât:

$a_i=b_1^i+c_1^i$.

Atunci orice morfism:

$f : A \to \mathbf{Z}$

este determinat, în mod unic, de (şi determină) un morfism:

$g : <b>\oplus<c> \to \mathbf{Z}$,

unde b∈B, c∈C şi {b,c} reprezintă un sistem maximal independent în A. Se observă că g poate să nu fie injectiv, caz în care nici f nu are această proprietate. Deci există morfisme:

$f : A \to \mathbf{Z}$

nenule şi neinjective. În acest caz, conform lui (1.2.1.3), subgrupul A⊕**Z** nu are P.I.S.D..

2) implică **1)** Fie:

$G=\mathbf{Q}\oplus F$

un grup ca şi în enunţ şi B un subgrup oarecare al lui G. Conform lui (2.4.3.10), dacă B este idecompozabil, atunci:

$$r(B)=1$$

şi B are P.I.S.D.. Presupunem că $r(B)\geq 2$. Atunci distingem trei cazuri:

<u>Cazul 1:</u> $\mathbf{Q}\leq B$. Atunci:

$$B=\mathbf{Q}\oplus E,$$

unde:

$$E=F\cap B$$

este un grup liber şi $r(E)\geq 1$. Conform lui (2.1.4.2), B are P.I.S.D..

<u>Cazul 2:</u> $F\leq B$. Atunci:

$$B=C\oplus F,$$

unde:

$$C=\mathbf{Q}\cap B$$

este un grup redus, de rang 1. Conform lui (2.1.4.3), B are P.I.S.D..

<u>Cazul 3:</u> Grupul:

$$\mathbf{Q}\cap B=C$$

este redus, de rang 1 şi:

$$F\cap B=E$$

este un grup liber, cu $r(E)<r(F)$. În acest caz, conform celor demonstrate în prima parte a acestei secţiuni, există un subgrup H al lui **Q**, cu $C\leq H$ şi există un subgrup K al lui F, cu $E\leq K$ astfel încât $C\oplus E$ este suma directă maximală conţinută în B, iar $H\oplus K$ este suma directă minimală ce conţine pe B, cu componente în **Q**, respectiv F. Deci $C\oplus E\leq B\leq H\oplus K$ şi au loc relaţiile de tipul celor din (49) - (52), corespunzătoare acestor grupuri. Deoarece K este liber, C este sumand direct în B. Rezultă că:

$$H=C, \qquad K=E \qquad \text{şi} \qquad B=C\oplus E$$

are P.I.S.D.. □

Teorema 2.4.3.15: *Fie G un grup fără-torsiune, complet decompozabil, care nu are nici un sumand direct liber. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Grupul G are proprietatea (P)*;
2) *$r(G)\leq 2$.*

***Demonstraţie*: 1)** implică **2)** Distingem două cazuri:

<u>Cazul 1:</u> G nu este redus. În acest caz:

$$G=D\oplus B,$$

unde D este divizibil, iar B este redus. Conform ipotezei şi lui (2.4.2.1), $r(D)\leq 2$. Din (2.1.4.2) rezultă că B este omogen, complet decompozabil, de rang finit. Presupunem că:

$$G=\mathbf{Q}\oplus B$$

şi $r(B)\geq 2$, şi considerăm subgrupul:

$$K=\mathbf{Q}\oplus C\oplus E,$$

unde C este un sumand direct, de rang unu al lui B, iar E este un subgrup al lui B, care este izomorf cu **Z**. Conform lui (2.1.4.3), K nu are P.I.S.D. - contradicţie cu ipoteza. Rezultă că, dacă:

$$G=\mathbf{Q}\oplus B,$$

atunci $r(B)\leq 1$. Presupunem acum că:

$$G=\mathbf{Q}\oplus\mathbf{Q}\oplus B.$$

Conform celor demonstrate mai sus, $r(B)\leq 1$. Fie U şi V subgrupuri ale lui **Q** astfel încât $t(B)<t(U)<t(V)$ şi:

$$K=V\oplus U\oplus B.$$

Atunci, iarăşi, (2.1.4.3) arată că acest subgrup K nu are P.I.S.D.. Rezultă că:

$$B=0 \qquad \text{şi} \qquad r(G)=2.$$

***Altfel*:** Dacă,

$$G=\mathbf{Q}\oplus\mathbf{Q}\oplus B,$$

atunci, ca şi la demonstraţia lui (2.4.3.14), obţinem că $\mathbf{Q}\oplus\mathbf{Q}$ are un subgrup idecompozabil L, de rang 2, pentru care $L\oplus B$ nu are proprietatea (P).

<u>Cazul 2:</u> G este redus. Atunci:

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i,$$

unde, pentru orice $i\in I$,

$$r(G_i)=1.$$

Presupunem că $r(G)\geq 3$. Dacă există $i_1, i_2\in I$, $i_1\neq i_2$, astfel încât $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt comparabile, atunci subgrupul:

$$K=G_{i_1}\oplus G_{i_2}\oplus H,$$

unde H este un subgrup al lui G, care este izomorf cu **Z**, nu are P.I.S.D.. Presupunem că, pentru orice $i_1, i_2\in I$, $i_1\neq i_2$, $t(G_{i_1})$ şi $t(G_{i_2})$ sunt incomparabile. În acest caz (2.4.3.9) arată că G are un subgrup idecompozabil de rang 2, de forma (53), şi astfel G nu mai are proprietatea (P). Aşadar, şi în acest caz, $r(G)\leq 2$.

2) implică **1)** Fie G un grup ca şi în enunţ, cu $r(G)\leq 2$ şi B un subgrup oarecare al lui G. Atunci B este sau idecompozabil, sau:

$B=H\oplus K$,

unde:

$r(H)=r(K)=1$.

În ambele cazuri B are P.I.S.D.. □

Acum, putem prezenta structura grupurilor fără-torsiune cu proprietatea (P):

Corolarul 2.3.4.16: *Dacă G este un grup fără-torsiune, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Grupul G are proprietatea (P)*;

2) ***a)*** *Dacă G este divizibil, atunci* $r(G)\leq 2$;

b) *Dacă G este redus, atunci*:

i) *G este idecompozabil şi* $r(G)\leq 2$,

sau:

ii) *G este complet decompozabil, nu are nici un sumand direct liber şi* $r(G)\leq 2$,

sau:

iii) $G=B\oplus F$ (54)

unde:

- *F este liber şi de rang finit*,

$r(B)=1$ *şi* $t(B)\geq t(F)$.

c) $G=\mathbf{Q}\oplus H$ (55)

unde H este redus şi:

i) *dacă H este liber, atunci r(H) este finit*,

sau:

ii) *dacă H nu este liber, atunci*:

$r(H)=1$.

Demonstraţie**: 1)** implică **2)** Fie:

$G=D\oplus H$

un grup fără-torsiune, unde D este divizibil şi H este redus. Conform celor demonstrate în această secţiune, distingem trei cazuri.

<u>Cazul 1:</u> H=0. În acest caz, (2.4.2.1) arată că:

G are proprietatea (P) dacă şi numai dacă $r(G)\leq 2$.

<u>Cazul 2:</u> D=0. Dacă G este idecompozabil şi $r(G)\geq 3$, atunci, conform celor demonstrate în prima parte a acestei secţiuni, urmând acelaşi raţionament ca şi în demonstraţia lui (2.4.3.14), obţinem că G conţine un subgrup care nu are P.I.S.D.. Aşadar, în acest caz, $r(G)\leq 2$. Presupunem că G nu este idecompozabil. În acest caz, considerăm,

conform Lemei lui Zorn, o mulţime maximal independentă $\{G_i\}_{i\in I}$ de sumanzi direcţi de rang unu ai lui G. Dacă:

$$G^{*}=\bigoplus_{i\in I} G_i,$$

atunci:

$$G=G^{*} \qquad \text{sau} \qquad G=G^{*}\oplus K,$$

unde K este un sumand direct al lui G, de rang cel puţin egal cu 2. Conform ipotezei, K şi orice subgrup al lui are P.I.S.D.. Dar K nu poate fi complet decompozabil, deoarece atunci contrazicem maximalitatea lui $\{G_i\}_{i\in I}$. Dacă, K este idecompozabil, atunci $r(K)\geq 2$ şi, pentru orice $i\in I$, $G_i\oplus K$ nu are P.I.S.D.. Aşadar:

$$K=0$$

şi G este un grup complet decompozabil. Dacă G nu are nici un sumand direct izomorf cu **Z**, atunci (2.3.4.15) arată că G are proprietatea (P) dacă şi numai dacă $r(G)\leq 2$. Presupunem că G are un sumand direct izomorf cu **Z**. Atunci, conform lui (2.1.4.3),

$$G=(\oplus_n \mathbf{Z})\oplus(\bigoplus_{i\in J} H_i),$$

unde:

- $n\in \mathbf{N}^{*}$,
- J este o submulţime a lui I, iar pentru orice i_1, $i_2\in J$, $i_1\neq i_2$, $t(H_{i_1})$ şi $t(H_{i_2})$ sunt tipuri incomparabile.

Acum, judecând ca şi la (2.4.3.15) - Cazul 2, obţinem că $|J|\leq 2$. Dacă:

$$|J|=2,$$

atunci (2.4.3.9) şi (1.2.1.3) arată că G are un subgrup care nu are P.I.S.D.. Rezultă că, în acest caz, G are proprietatea (P) dacă şi numai dacă el este de forma (53).

<u>Cazul 3:</u> $D\neq 0$ şi $H\neq 0$. Conform ipotezei, D, H şi orice subgrup al lor au P.I.S.D.. Conform lui (2.4.2.1) şi (2.1.4.2), $r(D)\leq 2$, iar H este complet decompozabil de rang finit. Dacă H este liber, atunci (2.4.3.14) completează demonstraţia pentru acest caz. Dacă H nu este liber, atunci, conform lui (2.1.4.3), el nu poate avea sumanzi direcţi izomorfi cu **Z**. În acest caz (2.3.4.15) completează demonstraţia. □

Se impun şi aici două observaţii:

Observaţie 2.4.3.17: 1) *Dacă G este un grup fără-torsiune cu P.I.S.D., atunci nu orice subgrup al lui G are aceeaşi proprietate.*

2) *Grupurile fără-torsiune care au proprietatea că orice subgrup propriu al lor are P.I.S.D. coincid cu cele cu P.I.S.D. cu această proprietate.* □

2.4.4. Grupuri mixte scindabile

În acestă secţiune vom arăta că problema grupurilor mixte cu proprietatea (P) nu are soluţie, adică avem:

Propoziţia 2.4.4.1: *Nu există grupuri mixte cu proprietatea (P).*

***Demonstraţie*:** Într-adevăr, fie G un grup mixt. Rezultă că există g, t$\in$G, unde g este un element de ordin infinit, iar t este un element de ordin p^n, cu p - număr prim şi n$\in\mathbf{N}^*$. Atunci, conform lui (1.2.1.3), subgrupul:

$$H=\langle g\rangle\oplus\langle t\rangle\cong\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}(p^n)$$

nu are P.I.S.D. şi G nu are proprietatea (P). □

CAPITOLUL 3

MODULE CU P.I.S.D.

În acest capitol vom prezenta alte caracterizări, decât cele prezentate în capitolul întâi, ale modulelor cu proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi, module care vor fi considerate peste diferite inele R, asociative, cu unitate. În general, acolo unde nu se precizează, modulele considerate vor fi stângi. Ca şi în primul capitol, orice altă condiţie (eventual suplimentară) asupra inelului R, sau R-modulelor M, se va pune ori de câte ori va fi cazul.

Vom începe studiul R-modulelor cu P.I.S.D., cu modulele injective cu această proprietate. Referitor la aceste module vom prezenta, aici,

- *condiţii necesare,*
- *condiţii suficiente*

şi

- *condiţii necesare şi suficiente*

pentru ca un astfel de modul să aibă P.I.S.D..

Vom trece apoi la descrierea sumelor directe de module cu P.I.S.D., prezentând noi soluţii la noua problemă a lui Fuchs, făcând şi un studiu al morfismelor unor astfel de sume de module. În cel de al treilea (şi ultimul) subcapitol, al acestui capitol, vom geneneraliza toate rezultatele obţinute în Subcapitolul 2.3, la module peste diferite inele.

3.1. MODULE INJECTIVE CU P.I.S.D.

Aşa cum am precizat mai sus, în acest subcapitol vom prezenta o serie de caracterizări ale modulelor injective cu proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi. Pentru un R-modul injectiv M, vom studia condiţiile în care el are P.I.S.D.. Vom prezenta o caracterizare laticeală a modulelor cu C.P.I.S.D., precum şi noi soluţii referitoare la problema caracterizării acelor R-module M, care au proprietatea că odată cu M şi $\oplus_I M$ are P.I.S.D., pentru orice mulţime de indici I. În finalul sub-capitolului, prin exemplificări, vom justifica lipsa oricărei legături dintre un R-modul M şi învelitoarea sa injectivă E(M), în problema intersecţiei sumanzilor direcţi.

3.1.1. Condiţii suficiente

Începem această secţiune cu o condiţie suficientă pentru ca un R-modul să aibă P.I.S.D..

Propoziţia 3.1.1.1: *Fie M un R-modul. Dacă pentru orice $\varphi \in End(M)$, $\ker\varphi$ este un sumand direct în M, atunci M are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Fie,

$$M=A\oplus B$$

o descompunere directă (oarecare) a lui M şi:

$$\varepsilon : A \to B$$

un morfism de R-module. Dacă:

$$\pi_A : M \to A$$

este proiecţia canonică a lui M pe A şi:

$$\mu_B : B \to M$$

este injecţia canonică a lui B în M, atunci:

$$\mu_B \circ \varepsilon \circ \pi_A : A\oplus B \to A\oplus B$$

este un endomorfism al lui M. Conform ipotezei, $\ker(\mu_B \circ \varepsilon \circ \pi_A)$ este un sumand direct în M. Deoarece μ_B este monomrfism,

$$\ker(\mu_B \circ \varepsilon \circ \pi_A)=\ker(\varepsilon \circ \pi_A),$$

şi, astfel, $\ker(\varepsilon \circ \pi_A)$ este un sumand direct în M, care conţine pe B. Conform cu [92, Teorema], rezultă că:

$$\ker(\varepsilon \circ \pi_A)=C\oplus B,$$

unde:

$$C=\ker\varepsilon$$

este un sumand direct în A. Acum (1.2.4.1) completează demonstraţia. □

Trebuie să facem aici două precizări:

Observaţia 3.1.1.2: *Reciproca lui (3.1.1.1) este, în general, falsă, adică: există R-module M, care au P.I.S.D. şi care au cel puţin un endomorfism φ cu proprietatea că $\ker\varphi$ nu este sumand direct în M.*

***Demonstraţie*:** Contraexemplu, fie p un număr prim şi:

$$M=\mathbf{Z}(p^{\infty}).$$

Considerăm aplicaţia:

$$\varphi : M \to M,$$

definită prin: pentru orice $x \in M$,

$$\varphi(x)=p\cdot x.$$

Se observă că φ este un endomorfism al lui M, care nu este nici nul, nici injectiv; deci kerφ este un subgrup propriu al lui M şi care nu este sumand direct în M (deoarece M este idecompozabil) şi, totuşi, M are P.I.S.D.. □

Observaţia 3.1.1.3: *Dacă M este un R-modul decompozabil, cu P.I.S.D., atunci M poate avea endomorfisme φ cu proprietatea că kerφ este un sumand direct în M, fără ca această proprietate să fie valabilă pentru orice endomorfism al lui M.*

***Demonstraţie*:** Fie M un R-modul cu P.I.S.D. şi:

$M=A\oplus B$

o descompunere directă (oarecare) a lui M,

$\varepsilon : A \to B$ şi $\eta : B \to A$

două morfisme de R-module. Definim:

$\varphi : M \to M$

prin: pentru orice $a\in A$ şi orice $b\in B$,

$\varphi(a+b)=\varepsilon(a)+\eta(b)$.

În acest caz, se poate demonstra uşor că $\varphi\in End(M)$ şi:

$\ker\varphi=\ker\varepsilon\oplus\ker\eta$.

Deoarece M are P.I.S.D., conform cu (1.2.4.1), rezultă că kerε este un sumand direct în A şi kerη este un sumand direct în B; deci kerφ este un sumand direct în M. □

Aşadar, am demonstrat că mulţimea R-modulelor cu proprietatea că, pentru orice $\varphi\in End(M)$, kerφ este un sumand direct în M, este strict inclusă în mulţimea R-modulelor cu P.I.S.D..

Din (1.2.8.14) şi (3.1.1.1) obţinem:

Corolarul 3.1.1.4: *Fie M un R-modul şi:*

$E=End(M)$.

Dacă, pentru orice endomorfism ε, al lui M, idealul εE este proiectiv şi:

$\ker\varepsilon=S_M(\ker\varepsilon)$,

atunci M are P.I.S.D.. □

Din (1.2.8.15) şi (3.1.1.1) obţinem:

Corolarul 3.1.1.5: *Dacă inelul End(M) este principal proiectiv drept şi, pentru orice endomorfism ε, al lui M,*

$\ker\varepsilon=S_M(\ker\varepsilon)$,

atunci M are P.I.S.D.. □

Acum putem prezenta o reciprocă a lui (3.1.1.1):

Propoziţia 3.1.1.6: *Fie M un R-modul şi:*

$E=End(M)$.

Dacă M are proprietatea că pentru orice ideale drepte (finit generate) I şi J ale lui E, are loc egalitatea:

$IM \cap JM = (I \cap J)M$,

atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) *Nucleul oricărui endomorfism ε, al lui M, este un sumand direct în M*;

2) *Pentru orice endomorfism ε, al lui M, idealul εE este proiectiv şi*:

$\ker\varepsilon = S_M(\ker\varepsilon)$;

3) *Inelul E este un inel drept principal proiectiv şi, pentru orice ε∈End(M)*,

$\ker\varepsilon = S_M(\ker\varepsilon)$;

4) *M are P.I.S.D.*;

5) *Inelul E are P.I.S.D., ca R-modul drept*.

Demonstraţie**:** Fie M un R-modul ca şi în enunţ.

1) implică **2)** Dacă are loc afirmaţia 1), conform cu (1.2.8.14), are loc şi afirmaţia 2).

2) implică **3)** Dacă are loc afirmaţia 2), atunci din (1.2.8.15) rezultă că are loc afirmaţia de la punctul 3).

3) implică **4)** Această implicaţie rezultă din (3.1.1.5).

4) implică **5)** Conform ipotezei, M este E-plat. Corolarul (1.2.8.17) arată că afirmaţia 4) implică afirmaţia 5).

5) implică **1)** Dacă E are P.I.S.D. şi este M este E-plat, atunci (1.2.8.12) arată că are loc afirmaţia 1). □

Desigur că rezultatele prezentate mai sus sunt valabile pentru orice R-modul, inclusiv pentru R-modulele injective.

Din [42, 112.7] şi (2.1.3.1) rezultă că grupurile divizibile care au inelul endomorfismelor regular au P.I.S.D.. Extindem, acum, acest rezultat la orice R-modul injectiv.

Propoziţia 3.1.1.7: *Fie M un R-modul injectiv cu End(M) un inel regular. Atunci M are P.I.S.D..*

Demonstraţie**:** Dacă M este un R-modul ca şi în enunţ, atunci, conform cu [34, Teorema 1.1, p. 105], rezultă că, pentru orice φ∈End(M), kerφ este un sumand direct în M. Acum (3.1.1.1) completează demonstraţia. □

Se ştie că dacă M satisface la condiţiile de la (3.1.1.7), atunci, pentru orice T - sumand direct în M, inelul endomorfismelor lui T este regular, dar reciproca, în general, este falsă, adică: dacă,

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

şi, pentru orice $i \in I$, End(M_i) este un inel regular, nu rezultă că şi End(M) este tot un inel regular (vezi [94, Lema 3.3, Exemplul 3.4]). În secţiunea (3.2.3) vom vedea că dacă, în plus, fiecare M_i este total invariant în M, atunci End(M) este regular.

Acum vom prezenta două rezultate analoage lui (1.2.2.6). Dar, pentru aceasta avem nevoie de următorul concept şi de următorul rezultat elementar.

Definiţie: *([56]) Un inel R se numeşte maximal de valuare dacă satisface la următoarele condiţii*:

1) *oricare ar fi a, $b \in R$, sau a divide pe b, sau b divide pe a*;
2) *orice sistem de ecuaţii, rezolvabile în R, de forma*:

$$x \equiv x_n \ (\text{modulo } I_n),$$

unde $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n \in R$ şi I_n este un ideal în R, are o soluţie în R.

Propoziţia 3.1.1.8: *Fie M un R-modul, iar T şi S două submodule ale lui M astfel încât $T \subseteq S$ şi T este un submodul pur în M. Atunci T este pur în S.*

***Demonstraţie*:** Presupunem că M, T şi S sunt ca şi în enunţ. Atunci, conform ipotezei, pentru orice $r \in R$, avem:

$$rT = T \cap rM.$$

Atunci:

$$T \cap rS \subseteq T \cap rM = rT,$$

şi, deoarece $rT \subseteq T \cap rS$, obţinem că T este pur în S. □

Primul rezultat analog lui (1.2.2.6) este:

Teorema 3.1.1.9: *Fie R un inel maximal de valuare, care este şi un domeniu cu ideale principale, şi fie M un R-modul fără-torsiune, de rang numărabil. Dacă M este de forma*:

$$M = D \oplus U, \qquad (56)$$

unde D este injectiv şi U este redus, de rang finit, atunci M are C.P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Fie $\{S_i\}_{i \in I}$ o familie de sumanzi direcţi ai lui M şi:

$$S = \bigcap_{i \in I} S_i .$$

Atunci S şi fiecare S_i, $i \in I$, sunt submodule pure în M, conform cu [41, §26]. Dacă notăm cu:

$$P = S \cap D,$$

avem două cazuri:

<u>Cazul 1:</u> Dacă $P \neq 0$, atunci, conform cu (3.1.1.8), P este un submodul pur atât în D cât şi în S. Deoarece D este divizibil, rezultă că P este divizibil (vezi [23, p. 106]) şi, deci, P este un sumand direct atât în D, cât şi în S. Aşadar:

$$D = P \oplus X \qquad \text{şi} \qquad S = P \oplus Y.$$

Deoarece Y şi D sunt submodule pure în M, rezultă că Y+D este pur în M. Atunci, conform cu [41, 26.1], (Y+D)/D este pur în:

$M/D \cong U$.

Din [56, Teorema 13] rezultă că (Y+D)/D este un sumand direct în M/D. Dar,

$Y \cap D \subseteq S \cap D = P$ şi $Y \cap P = 0$.

Rezultă că:

$Y \cap D = 0$

şi, conform cu [58, Lema 6], Y este un sumand direct în M. Atunci S este sumand direct în M.

<u>Cazul 2:</u> Dacă:

$P=0$,

atunci, făcând o demonstraţie analoagă primului caz, pentru:

$Y=S$,

obţinem că S este un sumand direct în M. □

Observăm că impunerea în (3.1.1.9) a unor condiţii suplimentare inelului R şi, respectiv R-modulului M, anulează condiţia ca sumandul U - partea redusă a lui M, să fie omogen şi complet decompozabil, păstrându-se aceeaşi concluzie ca şi la (1.2.2.6).

Teorema de mai sus oferă noi soluţii „*Problemei 9**".

Corolarul 3.1.1.10: *Dacă R şi M sunt ca şi în (3.1.1.9), atunci, pentru orice mulţime de indici I, R-modulul*:

$M^* = \oplus_I M$

are C.P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Dacă R este ca şi în (3.1.1.9), atunci R este noetherian; deci sumanzii:

$D^* = \oplus_I D$ şi, respectiv $U^* = \oplus_I U$,

ai lui M^*, au aceleaşi proprietăţi ca şi D, respectiv U. □

Corolarul 3.1.1.11: *Dacă R este un inel ca şi în (3.1.1.9) şi M este un R-modul injectiv, fără-torsiune, de rang numărabil, atunci M are C.P.I.S.D..*

***Demostraţie*:** Dacă R este ca şi în (3.1.1.9), atunci, cosiderând pe:

$U=0$,

obţinem afirmaţia din enunţ. □

Corolarul 3.1.1.12: *Dacă R este un inel ca şi în (3.1.1.9) şi M este un R-modul ca şi în (3.1.1.11), atunci, pentru orice mulţime numărabilă de indici I, R-modulul*:

$M^* = \oplus_I M$

are C.P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** O mulţime numărabilă de mulţimi numărabile este tot o mulţime numărabilă; deci M^* satisface la condiţiile de la (3.1.1.11). □

Al doilea rezultat analog lui (1.2.2.6) este:

Teorema 3.1.1.13: *Fie R un inel Dedekind şi M un R-modul decompozabil, fără-torsiune. Dacă pentru orice submodul pur S, al lui M, există un submodul T, al lui M astfel încât*:

$M/S \cong T$,

atunci M are C.P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Fie R şi M ca şi în enunţ. Din [56, Teorema 8] rezultă că M are o descompunere unică, abstracţie făcând de un izomorfism, de forma:

$M=D\oplus U$,

unde D este divizibil, iar U este redus. Acum putem aplica aceeaşi judecată ca şi la (3.1.1.9). Deci, fie $\{S_i\}_{i\in I}$ o familie de sumanzi direcţi ai lui M şi:

$S=\bigcap_{i\in I} S_i$.

Atunci S şi fiecare S_i, $i\in I$, sunt submodule pure în M, conform cu [41, §26]. Dacă notăm cu:

$P=S\cap D$,

avem, şi aici, două cazuri:

<u>Cazul 1:</u> Dacă $P\neq 0$, atunci P este un submodul pur şi în D, şi în S. Deoarece D este divizibil, rezultă că P este divizibil, deci P este un sumand direct şi în D şi în S. Fie:

$D=P\oplus X$ şi $S=P\oplus Y$.

Deoarece Y şi D sunt submodule pure în M, rezultă că şi Y+D este tot un submodul pur în M. Conform ipotezei şi lui [56, Teorema 4], rezultă că M/(Y+D) este decompozabil. Din [56, Teorema 3] rezultă că Y+D este un sumand direct în M. Dar,

$Y\cap D\subseteq S\cap D=P$ şi $Y\cap P=0$.

Rezultă că:

$Y\cap D=0$

şi, astfel,

$Y+D=Y\oplus D$.

În acest caz, rezultă că Y este un sumand direct în M. Aşadar, S este şi el un sumand direct în M.

<u>Cazul 2:</u> Dacă:

$P=0$,

atunci făcând o demonstraţie analoagă primului caz, pentru:

$Y=S$,

obţinem că S este un sumand direct în M. □

Obţinem şi în acest caz o soluţie pentru „*Problema 9**”:

Corolarul 3.1.1.14: *Fie R un domeniu Dedekind şi M un R-modul injectiv, fără-torsiune. Atunci, pentru orice mulţime de indici I, R-modulul*:

$M^{*}=\oplus_{I}M$

are C.P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Dacă R este un domeniu Dedekind, atunci, conform cu [10, p. 215], R este ereditar stâng şi noetherian. În acest caz, rezultă că M este decompozabil în sumanzi direcţi idecompozabili şi orice R-modul factor al lui M este injectiv, conform cu (1.2.1.4). Rezultă că:

$M^{*}=\oplus_{I}M$

satisface la condiţiile de la (3.1.1.13). □

În finalul acestei secţiuni prezentăm alte trei rezultate elementare, referitoare la R-modulele cu P.I.S.D..

Propoziţia 3.1.1.15: *Dacă R este un domeniu de integritate (comutativ) şi M este un R-modul divizibil şi noetherian, atunci, pentru orice mulţime de indici I, R-modulul*:

$M^{*}=\oplus_{I}M$

are C.P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Dacă R şi M sunt ca şi în enunţ, atunci M este fără-torsiune; el este un spaţiu vectorial peste corpul fracţiilor lui R, conform cu [35, p. 22]. Deoarece orice subspaţiu al unui spaţiu vectorial este sumand direct în acel spaţiu, rezultă că:

$M^{*}=\oplus_{I}M$

are C.P.I.S.D.. □

Propoziţia 3.1.1.16: *Fie M un R-modul idecompozabil şi*:

$E=End(M)$.

Dacă, pentru orice mulţime de indici I, R-modulul:

$M^{*}=\oplus_{I}M$

are P.I.S.D., atunci orice E-modul proiectiv are şi el P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Conform ipotezei şi lui (1.2.4.12), inelul E este ereditar stâng. Acum (1.2.1.5) completează demonstraţia. □

Propoziţia 3.1.1.17: *Fie M un R-modul idecompozabil şi*:

$E=End(M)$.

Dacă, pentru orice mulţime finită de indici I, R-modulul:

$M^{*}=\oplus_{I}M$

are P.I.S.D., atunci orice E-modul proiectiv, finit generat, are şi el P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Afirmaţia din enunţ rezultă din (1.2.4.13) şi (1.2.4.3). □

3.1.2. Condiţii necesare

Începem această secţiune cu o generalizare a lui (1.2.1.7).

Teorema 3.1.2.1: *Fie,*

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

un R-modul cu P.I.S.D., unde, pentru orice $i\in I$, M_i este un R-modul injectiv şi idecompozabil. Atunci au loc următoarele afirmaţii:

1) *Pentru orice $i, j\in I$,*

$Hom(M_i,M_j)=0$ *sau* $M_i\cong M_j$;

2) *Dacă, pentru orice $i\in I$, M_i este şi proiectiv, atunci, pentru orice $i, j\in I$,*

$M_i\cong M_j$.

***Demonstraţie*: 1)** Conform lui (1.1.1) şi lui (1.2.1.3), dacă M are P.I.S.D., atunci, pentru orice $i, j\in I$, şi orice morfism:

$\varphi : M_i \to M_j$,

$\ker\varphi$ este un sumand direct în M_i. Deoarece M_i este idecompozabil, rezultă că:

($\ker\varphi=0$, caz în care φ este monomorfism) sau ($\ker\varphi=M_i$),

caz în care φ este identic nul. Dacă φ este monomorfism, atunci $\varphi(M_i)$ este un submodul injectiv al lui M_j. Din [78, 2.15] rezultă că $\varphi(M_i)$ este un sumand direct al lui M_j. Deoarece M_j este (şi el) idecompozabil, rezultă că:

$\varphi(M_i)=M_j$.

Acum afirmaţia 1) din enunţ este complet demonstrată.

2) Presupunem că, pentru orice $i\in I$, M_i este injectiv, idecompozabil şi proiectiv. Atunci, conform cu [35, 20.15], pentru orice $i\in I$, există un idempotent $e_i\in R$, astfel încât:

$M_i\cong e_iR$.

Deoarece funcţia:

$e_ix \mapsto e_jx$

este un morfism de R-module,

de la $M_i\cong e_iR$ la $M_j\cong e_jR$,

conform ipotezei şi celor demonstrate la punctul 1), rezultă că, pentru orice $i, j\in I$,

$M_i\cong M_j$. □

Observaţia 3.1.2.2: *Din [78, 3.12] rezultă că dacă M este ca şi în (3.1.2.1), atunci, pentru orice $i\in I$, $End(M_i)$ este un inel local.* □

Următorul corolar prezintă o altă condiţie echivalentă cu ipoteza de la (3.1.2.1).

Corolarul 3.1.2.3: *Dacă*:

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

este un R-modul cu P.I.S.D., unde, pentru orice $i\in I$, M_i este un R-modul injectiv şi $End(M_i)$ este un inel local, atunci, pentru orice $i, j\in I$,

$Hom(M_i,M_j)=0$ sau $M_i\cong M_j$.

***Demonstraţie*:** Dacă End(M_i) este un inel local, atunci M_i este idecompozabil, conform lui [78, 3.11]. Deci putem aplica (3.1.2.1). □

Acest ultim rezultat ne permite caracterizarea sumelor directe de module injective uniseriale.

Definiţie: *([78, p. 78]) Un R-modul M se numeşte uniserial, dacă M are doar un număr finit de submodule şi acestea sunt total ordonate faţă de incluziune.*

Acum, din [78, p. 78] şi (3.1.2.3) obţinem:

Corolarul 3.1.2.4: *Dacă,*

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

este un R-modul cu P.I.S.D. şi, pentru orice $i\in I$, M_i este un R-modul injectiv şi uniserial, atunci, pentru orice $i, j\in I$,

$Hom(M_i,M_j)=0$ sau $M_i\cong M_j$. □

Fie p un număr prim şi:

$B_k=\oplus_I \mathbf{Z}(p^k)$,

unde I este o mulţime oarecare de indici şi:

$k\in \mathbf{N}^*$ sau $k=\infty$.

Din (2.1.2.4) rezultă că există un grup abelian G astfel încât B_k să fie sumand direct în G dacă şi numai dacă:

($k=1$ şi I este oarecare) sau ($k\geq 2$) sau ($k=\infty$ şi $|I|=1$).

Aşadar partea de torsiune a unui grup abelian cu P.I.S.D. este o sumă directă de subgrupuri total invariante, fiecare având P.I.S.D.. În continuarea acestei secţiuni vom demonstra că orice R-modul injectiv cu P.I.S.D. admite, abstracţie făcând de un izomorfism, o descompunere unică în sumanzi direcţi idecompozabili, total invarianţi.

Fie M un R-modul injectiv. Din [78, p. 118-119] rezultă că M admite, abstracţie făcând de un izomorfism, o descompunere unică de forma:

$$M=M_1\oplus M_2, \qquad (57)$$

unde:

- M_1 este învelitoarea injectivă a unei sume directe de R-module injective idecompozabile;
- M_2 este un R-modul injectiv care nu are submodule injective idecompozabile;

- pentru orice morfism:

  $$f : M_1 \to M_2,$$

  M_1 este învelitoarea injectivă a lui kerf;
- pentru orice morfism:

  $$f : M_2 \to M_1,$$

  M_2 este învelitoarea injectivă a lui kerg.

Teorema 3.1.2.5: *Fie R un inel asociativ, cu unitate. Dacă M este un R-modul injectiv cu P.I.S.D., descompus conform relaţiei (57), atunci M admite, abstracţie făcând de un izomorfism, o descompunere unică în sumanzi direcţi idecompozabili, total invarianţi.*

***Demonstraţie*:** Presupunem că R-modulul M satisface la condiţiile din enunţ şi considerăm:

$$f : M_1 \to M_2$$

un morfism de R-module. Atunci, conform cu [78, Propoziţia 2.3] şi (1.2.1.3),

$$M_1=E(\ker f)=\ker f.$$

Deci:

$$Hom(M_1,M_2)=0.$$

Analog se arată că:

$$Hom(M_2,M_1)=0.$$

Rezultă că M_1 şi M_2 sunt total invarianţi în M. Conform ipotezei,

$$M_1=E(\bigoplus_{i\in I} M_i),$$

unde, pentru orice $i\in I$, M_i este injectiv şi idecompozabil. Din [95, Teorema 3 şi Corolarul 4.2] rezultă că există o submulţime J a lui I astfel încât:

$$M_1=M_1'\oplus E(\bigoplus_{i\in J} M_i),$$

unde M_1' este un submodul injectiv idecompozabil, al lui M_1. Se poate demonstra uşor că:

$$Hom(M_1',M_2)=Hom(M_2,M_1')=0$$

şi orice morfism:

$$h : M_1' \to E(\bigoplus_{i\in J} M_i)$$

este un monomorfism. Din (3.1.2.1), (3.1.3.1) şi [78, 3.13] (sau [95, Corolarul 4.1]) rezultă că M_1 admite o descompunere unică, până la un izomorfism, în sumanzi direcţi idecompozabili, total invarianţi. □

Următorul rezultat poate fi considerat o teoremă de structură pentru o clasă de R-module injective cu P.I.S.D..

Teorema 3.1.2.6: *Fie R un inel artinian şi M - un R-modul injectiv.*

1) *Dacă M admite o descompunere directă în sumanzi direcţi total invarianţi, neizomorfi şi idecompozabili, atunci există o familie (finită) de ideale prime distincte* $\{P_i\}_{i\in I}$*, ale lui R, astfel încât*:

$$M=\bigoplus_{i\in I} E(R/P_i).$$

2) ***a)*** *Dacă M are P.I.S.D. şi nu admite o descompunere directă în sumanzi direcţi total invarianţi, neizomorfi şi idecompozabili, atunci există o familie (finită) de ideale prime nedistincte* $\{P_i\}_{i\in I}$*, ale lui R, astfel încât*:

$$M=\bigoplus_{i\in I} E(R/P_i).$$

b) *Dacă M are P.I.S.D. şi este (şi) proiectiv, atunci există un ideal prim P, al lui R, astfel încât*:

$$M=\oplus_I E(R/P).$$

În acest caz, dacă R este şi regular, atunci R/P este un spaţiu vectorial finit dimensional peste corpul endomorfismelor sale şi R/P este injectiv.

***Demonstraţie*:** Dacă R este artinian, atunci R este şi noetherian, conform cu [78, 3.25 Corolar]. Deoarece M este injectiv, rezultă că:

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i,$$

unde, pentru orice $i\in I$, M_i este un R-modul injectiv idecompozabil. Din [78, 4.5] rezultă că, pentru orice $i\in I$, există un R-modul simplu S_i astfel încât M_i este învelitoarea injectivă a lui S_i; deci:

$$M_i=E(S_i) \qquad \text{şi} \qquad M=\bigoplus_{i\in I} E(S_i).$$

Dacă S_i este simplu, atunci există un ideal prim P_i, al lui R, astfel încât:

$S_i\cong R/P_i$ (vezi [70, 6.6.1] şi [78, Lema 2.30, Corolar]) şi $M=\bigoplus_{i\in I} E(R/P_i)$.

Dacă M admite o descompunere directă în sumanzi direcţi total invarianţi, neizomorfi şi idecompozabili, atunci, pentru orice $i, j\in I$, $i\neq j$,

$$Hom(M_i,M_j)=0,$$

caz care confirmă afirmaţia de la punctul 1) al teoremei. Dacă M are P.I.S.D. şi nu admite o descompunere directă în sumanzi direcţi total invarianţi, neizomorfi şi idecompozabili, atunci, pentru orice $i, j\in I$, $i\neq j$,

$Hom(M_i,M_j)=0$ sau (există $i, j\in I$, $i\neq j$, astfel încât $M_i\cong M_j$),

caz în care are loc afirmaţia de la punctul 2)a) al teoremei. Dacă, în plus, M este şi proiectiv, atunci, pentru orice $i\in I$, M_i este proiectiv şi, conform cu [70, 6.7.4] şi (3.1.2.1)2), rezultă că, pentru orice $i, j\in I$,

$$M_i\cong M_j,$$

caz în care, conform cu [78, 2.31, Corolar], pentru orice $i, j\in I$,

$$P_i=P_j$$

şi afirmaţia de la punctul 2)b) al teoremei are loc. Acum [67, 2.5] completează demonstraţia. □

Corolarul 3.1.2.7: *Fie R un inel artinian şi M un R-modul injectiv.*

1) *Dacă M satisface la condiţiile de la (3.1.2.6)1), atunci M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă există un R-modul semi-simplu*:

$$S=\bigoplus_{i=1}^{n} S_i,$$

unde n este un număr natural oarecare şi, pentru orice i=1, 2, ..., n, S_i este un R-modul simplu, total invariant în M astfel încât:

$$M=E(S)=E(\bigoplus_{i=1}^{n} S_i).$$

2) *Dacă M satisface la condiţiile de la (3.1.2.6)2)a), atunci există un R-modul semi-simplu*:

$$S^*=\bigoplus_{i=1}^{n} S_i,$$

unde:

- *n este un număr natural oarecare*

şi:

- *pentru orice i=1, 2, ..., n*:

$$S_i=\oplus_{J_i} S^i$$

este un R-modul semi-simplu şi total invariant în M, S^i este un R-modul simplu şi total invariant în M, iar J_i este o mulţime oarecare de indici astfel încât:

$$M=E(S^*)=E(\bigoplus_{i=1}^{n} S_i).$$

Reciproc, dacă, pentru orice i=1, 2, ..., n, End(S^i) - inelul endomorfismelor lui S^i, este un domeniu cu ideale principale, atunci, conform cu (3.1.3.2), R-modulul:

$$M=E(S^*)=E(\bigoplus_{i=1}^{n} S_i)$$

are P.I.S.D..

3) *Dacă M satisface la condiţiile de la (3.1.2.6)2)b), atunci*:

$$M=\oplus_I E(S),$$

unde S este un R-modul simplu şi injectiv, iar I este o mulţime oarecare de indici. Dacă, în plus, R este şi regular, atunci:

$$M=\oplus_I S,$$

unde S este un R-modul simplu şi injectiv, iar I este o mulţime oarecare de indici.

Reciproc, dacă End(E(S)) - inelul endomorfismelor învelitorii injective a R-modulului simplu S, este un domeniu cu ideale principale, atunci, conform cu (3.1.3.2), pentru orice mulţime de indici I, R-modulul:

$$M=\oplus_I E(S)$$

are P.I.S.D.. Dacă, în plus, R este şi regular şi End(S) - inelul endomorfismelor R-modulului simplu S, este un domeniu cu ideale principale, atunci, conform cu (3.1.3.2), pentru orice mulţime de indici I, R-modulul:

$$M=\oplus_I S$$

are P.I.S.D.. □

3.1.3. Condiţii necesare şi suficiente

Începem prezentarea rezultatelor din această secţiune cu o reciprocă a lui (3.1.2.1)1).

Teorema 3.1.3.1: *Fie*,

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

un R-modul fără-torsiune astfel încât:

1) *pentru orice* $i, j\in I$,

$$Hom(M_i,M_j)=0 \qquad \text{sau} \qquad M_i\cong M_j;$$

2) *pentru orice* $i\in I$, *End*(M_i) *- inelul endomorfismelor lui* M_i *este un domeniu cu ideale principale*.

Atunci M are P.I.S.D..

Demonstraţie: Fie,

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

un R-modul cu proprietăţile din enunţ. Atunci, conform cu (1.2.5.1), pentru orice $i\in I$, M_i este idecompozabil. Considerăm pe mulţimea I relaţia de echivalenţă, notată cu „≈” şi introdusă în (1.2.1.8): pentru orice $i_1, i_2\in I$, prin definiţie:

$i_1\approx i_2$ dacă şi numai dacă $M_{i_1}\cong M_{i_2}$.

Pentru un $i\in I$, notăm cu i^* clasa de echivalenţă a lui i, deci:

$$i^*=\{k\in I \mid M_k\cong M_i\}.$$

Atunci $\{i^*\}_{i\in I}$ este partiţia lui I, corespunzătoare relaţiei „≈”, iar:

$$M=\bigoplus_{i^*\in I/\approx} M_{i^*},$$

unde:

$$M_{i^*}=\bigoplus_{k\in i^*} M_k$$

este un R-modul cu P.I.S.D., conform lui (1.2.5.2). Pe de altă parte, pentru orice i_1, $i_2\in I$, care nu sunt echivalente,

$$\text{Hom}(M_{i_1^*},M_{i_2^*})=\text{Hom}(\bigoplus_{k\in i_1^*} M_k,\bigoplus_{l\in i_2^*} M_l)$$

se scufundă izomorf în:

$$\text{Hom}(\bigoplus_{k\in i_1^*} M_k,\prod_{l\in i_2^*} M_l)=\prod_{k\in i_1^*}\prod_{l\in i_2^*}\text{Hom}(M_k,M_l)=0.$$

Deci, pentru orice i_1, $i_2\in I$, care nu sunt echivalente, $M_{i_1^*}$ şi $M_{i_2^*}$ sunt total invariante în M. Acum (1.1.2) şi (1.2.1.1) completează demonstraţia. □

Acum putem obţine noi soluţii la „*Problema 9**”

Corolarul 3.1.3.2: *Dacă M satisface la condiţiile de la (3.1.3.1), atunci, pentru orice mulţime de indici J, R-modulul*:

$$M^*=\oplus_J M$$

are P.I.S.D..

Demonstraţie: Din demonstraţia lui (3.1.3.1) rezultă că:

$$M=\bigoplus_{i^*\in I/\approx} M_{i^*},$$

unde:

$$M_{i^*}=\bigoplus_{k\in i^*} M_k$$

are P.I.S.D. şi, pentru orice i_1, $i_2\in I$, care nu sunt echivalente, $M_{i_1^*}$ şi $M_{i_2^*}$ sunt total invariante în M. Rezultă că:

$$M^*=\oplus_J M=\oplus_J(\bigoplus_{i^*\in I/\approx} M_{i^*})=\bigoplus_{i^*\in I/\approx}(\oplus_J M_{i^*})=\bigoplus_{i^*\in I/\approx}(M_{i^*})^J,$$

unde:

$(M_{i^*})_J = \oplus_J M_{i^*}$.

Aplicând aceeaşi judecată ca şi la (3.1.3.1), obţinem că, pentru orice i_1, $i_2 \in I$, care nu sunt echivalente, $(M_{i_1^*})_J$ şi $(M_{i_2^*})_J$ sunt total invariante în M. Din (1.2.5.2) obţinem că, pentru orice $i \in I$, $(M_{i^*})_J$ are P.I.S.D.. Şi în acest caz, (1.1.2) şi (1.2.1.1) completează demonstraţia. □

Fie M un R-modul drept. Din (1.2.8.2) şi (1.2.8.3) rezultă că dacă M are P.I.S.D., atunci:

E=End(M)

are aceeaşi proprietate, şi, pentru orice idempotent $f \in E$ şi orice morfism $g \in (1-f)Ef$, idealul gE este proiectiv. În general, dacă E are P.I.S.D., nu rezultă că şi M are P.I.S.D., dar, dacă M este E-plat, acest lucru este adevărat, conform cu (1.2.8.19) şi (1.2.8.18). În particular, dacă M este fără-torsiune şi E este un domeniu cu ideale principale, caz în care orice endomorfism nenul al lui M este monomorfism - vezi (1.2.5.1), atunci:

M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă E are P.I.S.D..

În acelaşi context avem şi următorul rezultat:

Propoziţia 3.1.3.3: *Dacă M este un R-modul drept astfel încât:*

E=End(M)

este un inel regular şi M este E-plat, atunci E şi M au P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Dacă M este un R-modul ca şi în enunţ, atunci, conform cu [94, p. 237], orice ideal principal al lui E este un sumand direct în E; deci E este un inel principal proiectiv drept (vezi secţiunea (1.2.8)). Din (1.2.8.4) rezultă că E are P.I.S.D.. Deoarece M este E-plat, (1.2.8.17) completează demonstraţia. □

În continuarea acestei secţiuni vom folosi conceptul dual proprietăţii intersecţiei sumanzilor direcţi, concept care va fi dezvoltat în Capitolul 4.

Definiţie: *Un R-modul (un grup abelian) M pentru care suma oricăror doi sumanzi direcţi (adică submodulul (subgrupul) lui M generat de reuniunea lor) este tot un sumand direct în M, se numeşte modul (grup) cu proprietatea sumei sumanzilor direcţi, prescurtat P.S.S.D..*

Definiţie: *Un R-modul (un grup abelian) M spunem că are complet (sau total) proprietatea sumei sumanzilor direcţi, prescurtat C.P.S.S.D., dacă suma oricărei familii de sumanzi direcţi (adică submodulul (subgrupul) lui M generat de reuniunea lor) este tot un sumand direct în M.*

Fie M un R-modul. Notăm cu S(M) mulţimea tuturor submodulelor şi cu S_M mulţimea sumanzilor direcţi, ai lui M, adică:

$S(M)=\{N \mid N\leq M\}$

şi:

$S_M=\{T\leq M \mid T \text{ este un sumand direct în } M\}$.

Dacă M are şi P.I.S.D. şi P.S.S.D., atunci S_M este o latice (adică S_M este o sublatice a laticii tuturor submodulelor lui M), iar dacă M are şi C.P.I.S.D. şi C.P.S.S.D., atunci S_M este o latice completă, adică S_M este o sublatice completă a laticii tuturor submodulelor lui M.

În acelaşi context avem următorul rezultat elementar:

Propoziţia 3.1.3.4: *Un R-modul M are C.P.I.S.D. dacă şi numai dacă S_M este o latice completă.*

***Demonstraţie*:** Fie M un R-modul cu C.P.I.S.D. şi fie $\{T_i\}_{i\in I}$ o familie oarecare de sumanzi direcţi ai lui M. Conform ipotezei, $\bigcap_{i\in I} T_i$ este un sumand direct în M; deci, pentru orice familie $\{T_i\}_{i\in I}\subseteq S_M$, există $\inf\{T_i\}_{i\in I}\in S_M$. Aceasta echivalează cu faptul că S_M este o latice completă vezi [69, 1.4.47]. □

Corolarul 3.1.3.5: *Un R-modul M are C.P.I.S.D. dacă şi numai dacă, pentru orice familie $\{T_i\}_{i\in I}$ de sumanzi direcţi ai lui M, $\sum_{i\in I} T_i$ (adică submodulul lui M generat de $\bigcup_{i\in I} T_i$) este tot un sumand direct în M. Aşadar*:

M are C.P.I.S.D. dacă şi numai dacă M are C.P.S.S.D.. □

Din (1.2.3.11) şi (3.1.3.4) obţinem:

Corolarul 3.1.3.6: *Dacă R este un domeniu cu ideale principale şi M este un R-modul care are un submodul divizibil nenul, atunci*:

M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă S_M este o latice completă.

Aşadar, în acest caz, dacă M are P.I.S.D., atunci M are şi P.S.S.D.. □

Deoarece orice domeniu local Dedekind este un domeniu cu ideale principale, din [67, Teorema 8], (1.2.3.11) şi (3.1.3.4) obţinem:

Corolarul 3.1.3.7: *Dacă R este un domeniu local Dedekind şi M este un R-modul care are un submodul divizibil nenul, atunci*:

M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă S_M este o latice completă.

Aşadar, şi în acest caz, dacă M are P.I.S.D., atunci el are şi P.S.S.D.. □

În (1.2.1.5) am precizat că în cazul unui inel asociativ cu unitate R,

toate R-modulele au P.I.S.D. dacă şi numai dacă R este ereditar stâng.

Acum vom demonstra un rezultat analog, pentru R-module injective, în cazul unui inel artinian.

Teorema 3.1.3.8: *Fie R un inel artinian. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Toate R-modulele injective au P.I.S.D.*;
2) *Inelul R este ereditar stâng*;
3) *Toate R-modulele injective au P.S.S.D.*.

Demonstraţie**: 1)** implică **2)** Presupunem că toate R-modulele injective au P.I.S.D. şi fie M un astfel de R-modul. Considerăm două submodule injective T şi S, ale lui M. Atunci, conform cu [78, Propoziţia 2.3], T şi S sunt sumanzi direcţi în M. Deoarece M are P.I.S.D., rezultă că $T\cap S$ este un sumand direct în M. Dar, atunci:

$T=(T\cap S)\oplus U$ şi $T+S=U\oplus S$

este tot un sumand direct în M. Deci T+S este un submodul injectiv al lui M. Acum, din [35, Propoziţia 10, p. 62, Corolar], rezultă că R este semi-simplu, deci R este ereditar stâng.

2) implică **1)** Acum, fie R un inel ereditar stâng şi M un R-modul injectiv. Considerăm o familie $\{T_i\}_{i\in I}$ de sumanzi direcţi ai lui M. Atunci, pentru orice $i\in I$, T_i este injectiv, conform cu [78, Propoziţia 2.3]. Deoarece R este noetherian (vezi [78, 3.25, Corolar]), rezultă că $\bigoplus_{i\in I} T_i$ este, tot, un modul injectiv, conform lui [78, 4.1]. În aceste condiţii $\sum_{i\in I} T_i$ este o imagine epimorfică a unui R-modul injectiv şi, deoarece R este ereditar, rezultă că $\sum_{i\in I} T_i$ este un R-modul injectiv; aşadar $\sum_{i\in I} T_i \in S_M$. Conform lui [69, 1.4.47], rezultă că S_M este o latice completă. Atunci $\bigcap_{i\in I} T_i$ este un sumand direct în M şi, astfel, M are C.P.I.S.D. Acum (1.2.1.8) completează demonstraţia echivalenţei dintre afirmaţiile 1) şi 2), ale teoremei.

2) echivalent **3)** Această echivalenţă rezultă din echivalenţa primelor două afirmaţii şi din [34, Propoziţia 10, p. 62, Corolar]. □

Observaţia 3.1.3.9: *În general, Teorema 3.1.3.8 nu este adevărată pentru un inel noetherian*.

Demonstraţie**:** Contraexemplu, inelul **Z** al întregilor este noetherian şi ereditar şi există grupuri abeliene divizibile, care nu au P.I.S.D.; de exemplu $\mathbf{Z}(p^\infty)\oplus\mathbf{Z}(p^\infty)$. □

Din (3.1.3.4), (3.1.3.8), (1.2.1.6) şi (1.2.1.8) obţinem:

Corolarul 3.1.3.10: *Fie R un inel comutativ noetherian. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Toate R-modulele injective au C.P.I.S.D.*;

2) *Toate R-modulele injective au P.I.S.D.*;

3) *Inelul R este ereditar stâng şi semi-simplu*;

4) *Pentru orice R-modul injectiv M, S_M este o latice completă*;

5) *Toate R-modulele injective au P.S.S.D.*;

6) *Pentru orice R-modul injectiv M, S_M este o latice*;

7) *Orice R-modul injectiv M este*:

a) *fără-torsiune*,

sau

b) *de torsiune, şi orice sumand direct idecompozabil al lui M este total invariant în M.* □

Corolarul 3.1.3.11: *În condiţiile de la (3.1.3.10) au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Toate R-modulele injective au P.S.S.D.*;

2) *Pentru orice R-modul injectiv M, S_M este o latice.* □

În continuarea acestei secţiuni vom arăta că în problema intersecţiei sumanzilor direcţi, între un R-modul M şi E(M) - învelitoarea injectivă a lui M, în general, nu există nici o legătură. Vom exemplifica acest fapt pentru grupuri abeliene. Astfel:

1) Există grupuri abeliene M, pentru care M şi E(M) au P.I.S.D.; de exemplu: dacă p este un număr prim şi:

$M=\mathbf{Z}(p)$,

atunci:

$E(M)=\mathbf{Z}(p^\infty)$.

Din (2.1.2.2) şi (2.1.3.5) rezultă că M şi E(M) au P.I.S.D..

2) Există grupuri abeliene M cu P.I.S.D., pentru care E(M) nu are P.I.S.D.; de exemplu: dacă p este un număr prim şi:

$M=\mathbf{Z}(p)\oplus\mathbf{Z}(p)$,

Atunci, conform cu [78, 2.23]:

$E(M)=\mathbf{Z}(p^\infty)\oplus\mathbf{Z}(p^\infty)$.

Din (2.1.2.2) rezultă că M are P.I.S.D., iar din (2.1.3.5) rezultă că E(M) nu are P.I.S.D..

3) Există grupuri abeliene M, pentru care M şi E(M) nu au P.I.S.D.; de exemplu: dacă p este un număr prim şi:

$M=\mathbf{Z}(p^3)\oplus\mathbf{Z}(p^3)$,

atunci:

$E(M)=\mathbf{Z}(p^\infty)\oplus\mathbf{Z}(p^\infty)$.

Tot din (2.1.2.2) şi (2.1.3.5) rezultă că nici M, nici E(M) nu au P.I.S.D..

4) Există grupuri abeliene M, care nu au P.I.S.D., dar pentru care E(M) are această proprietate; de exemplu, dacă:

$M=M_1\oplus M_2\oplus M_3$,

unde:

- $M_1=\mathbf{Z}$ - grupul aditiv al numerelor întregi,
- $M_2=\{\frac{m}{n}\in\mathbf{Q} \mid n\in\{p, q, p\cdot q\}$, unde p şi q sunt două numere prime distincte},

iar:

- $M_3=\{\frac{m}{n}\in\mathbf{Q} \mid$ n este un număr întreg, liber de pătrate}.

Conform lui (1.2.7.1), M nu are P.I.S.D., dar:

$E(M)=\mathbf{Q}\oplus\mathbf{Q}\oplus\mathbf{Q}$

are P.I.S.D., conform lui (2.1.3.1). □

Se ştie că, în general, fiind dat un R-modul M, intersecţia a două submodule injective, ale lui M, nu este (tot) un submodul injectiv (al lui M), dar, dacă M are P.I.S.D., acest lucru se întâmplă. Notând, ca şi mai sus, cu E(M) - învelitoarea injectivă a R-modulului M, în finalul acestei secţiuni vom demonstra următorul rezultat:

Teorema 3.1.3.12: *Fie M un R-modul. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *E(M) are P.I.S.D.*;

2) *Pentru orice submodule T şi S, ale lui M, are loc egalitatea*:

$$E(T)\cap E(S)=E(T\cap S). \qquad (58)$$

Pentru demonstrarea acestei teoreme avem nevoie de următorul rezultat - reciproca Propoziţiei 2.22 din [78]:

Lema 3.1.3.13: *Dacă M este un R-modul şi F este un sumand direct în E(M), atunci există N - un submodul al lui M astfel încât*:

$E(N)=F$.

***Demonstraţie*:** Fie M şi F ca şi în enunţ şi fie:

$N=M\cap F$.

Atunci N este un submodul atât în M, cât şi în F şi, conform lui [78, 2.22], E(N) este un sumand direct atât în E(M), cât şi în:

$E(F)=F$.

Deci:

$F=E(N)\oplus K$.

Deoarece:

$H=K\cap M\subseteq F\cap M=N$,

rezultă că E(H) este un sumand direct şi în K, şi în E(N). Rezultă că:

E(H)=0 şi K=0,

căci, dacă, $K\neq0$, atunci M nu este esenţial în E(M) - ceea ce nu se poate. □

***Demonstraţia Teoremei 3.1.3.12*: 1)** implică **2)** Presupunem că E(M) are P.I.S.D. şi considerăm două submodule T şi S, ale lui M. Atunci E(T) şi E(S) sunt sumanzi direcţi în E(M) şi $E(T\cap S)$ este un sumand direct şi în E(T) şi în E(S). Deci, conform cu (3.1.3.13),

$E(T)=E(T\cap S)\oplus E(X)$ şi $E(S)=E(T\cap S)\oplus E(Y)$,

unde X este un submodul al lui T şi Y este un submodul al lui S. Deoarece $E(T\cap S)$ este un sumand direct în $E(T)\cap E(S)$, care, conform ipotezei, este un sumand direct în E(M), rezultă că există un submodul U, al lui M, astfel încât:

$E(T)\cap E(S)=E(T\cap S)\oplus E(U)$. (∗)

Din egalitatea (∗) şi (3.1.3.13) rezultă că U este un submodul al lui $T\cap S$; dar, atunci E(U) este un sumand direct în $E(T\cap S)$ - contradicţie cu egalitatea (∗). Rezultă că:

E(U)=0

şi egalitatea (∗) coincide cu egalitatea din enunţul teoremei.

2) implică **1)** Dacă, pentru orice submodule T şi S, ale lui M, are loc egalitatea (58), atunci, conform cu (3.1.3.13), E(M) are P.I.S.D.. □

3.2. MORFISME DE SUME DIRECTE DE MODULE CU P.I.S.D.

Aşa cum am mai precizat, Fuchs a propus spre rezolvare o nouă problemă relativă la R-modulele (grupurile abeliene) cu P.I.S.D., „*Problema 9**”. Soluţii la această (nouă) problemă (a lui Fuchs) am prezentat în subcapitolele anterioare. În acest subcapitol vom studia sumele directe de R-module (grupuri abeliene) cu P.I.S.D., în sensul că:

- *vom prezenta alte soluţii ale acestei (noi) probleme* (atât pentru R-module - în Secţiunea 3.2.1, cât şi pentru grupuri abeliene - în Secţiunea 3.2.2);
- *vom face un studiu al nucleelor şi imaginilor morfismelor de sume directe de R-module* (în Secţiunea 3.2.3), ale cărui rezultate le vom aplica la sumele directe de R-module cu P.I.S.D. (în Secţiunea 3.2.4).

Peste tot în acest subcapitol vom nota cu:

$M^*=\oplus_I M$,

unde M este un R-modul (grup abelian), iar I este o mulţime oarecare de indici.

3.2.1. Sume directe de module cu P.I.S.D.

În această secţiune vom prezenta alte soluţii ale „*Problemei 9**”. Soluţii ale acestei probleme, pentru R-module, se găsesc în Secţiunile: 1.2.4, 1.2.5, 3.1.1 şi 3.1.3. Rezultatele descrise aici trebuie privite ca o completare a celor prezentate în secţiunile respective. În acest sens, vom nota cu R un inel asociativ, cu unitate, iar modulele le vom considera stângi, peste astfel de inele. Alte condiţii (eventual suplimentare) asupra inelului R, sau R-modulelor, se vor pune ori de câte ori va fi cazul.

Pentru început avem:

Observaţia 3.2.1.1: *Pentru un inel R, următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Pentru orice R-modul proiectiv (finit generat) M şi orice mulţime (finită) de indici I, R-modulul M^* are P.I.S.D.*;
2) *R este ereditar (semi-ereditar) stâng*.

***Demonstraţie*:** Echivalenţa afirmaţiilor din enunţ rezultă din (1.2.1.5), [70, 6.7.4] şi, respectiv (1.2.4.3). □

Următorul rezultat se referă la module injective peste domenii noetheriene.

Propoziţia 3.3.1.2: *Fie R un domeniu noetherian şi M un R-modul injectiv. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Pentru orice mulţime de indici I, R-modulul M^* are P.I.S.D.*;
2) *M este fără-torsiune*.

***Demonstraţie*:** **1)** implică **2)** Dacă M are proprietatea din enunţ, atunci, conform lui (1.2.2.2), el nu poate avea sumanzi direcţi idecompozabili, de torsiune. Rezultă că M este fără-torsiune.

2) implică **1)** Fie:

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

un R-modul injectiv, fără-torsiune, descompus conform lui [68, Teorema 2.5]; deci, pentru fiecare $i\in I$, M_i este un R-modul injectiv idecompozabil. Deoarece M este fără-torsiune, conform lui [78, p. 50], [68, 2.4 şi 3.1] şi lui (1.2.1.7), pentru fiecare $i\in I$, M_i este izomorf cu corpul fracţiilor lui R. Rezultă că M este un spaţiu vectorial peste acest corp, deci are loc afirmaţia de la punctul 1), din enunţ. □

Din (3.2.1.2) şi (1.2.4.12) obţinem:

Corolarul 3.2.1.3: *Fie R un domeniu noetherian şi M un R-modul injectiv, idecompozabil, fără-torsiune. Atunci au loc următoarele afirmaţii echivalente*:

1) *Pentru orice T şi S sumanzi direcţi în M^*, şi pentru orice morfism de R-module*:

$$f: S\to T,$$

kerf este un sumand direct în S;

2) *Pentru orice N - sumand direct în M^* şi orice $g\in End(N)$, kerg este un sumand direct în sumandul N*;

3) *Inelul*:

$$E=End(M)$$

este ereditar (drept), iar M este un E-modul (stâng) E-plat şi auto-mic. □

Următorul rezultat se referă la o clasă de module peste domenii dedekindiene.

Propoziţia 3.2.1.4: *Fie R un domeniu Dedekind şi M un R-modul cu următoarele proprietăţi*:

1) *M are P.I.S.D.*;

2) *M are un sumand direct $D\neq 0$, maximal injectiv*;

3) *pentru fiecare ideal prim P (al lui R), P-componenta redusă, de torsiune M_P, a lui M este elementară.*

Atunci au loc următoarele afirmaţii:

a) *Dacă D este de torsiune, atunci, pentru orice mulţime de indici I, cu $|I|\geq 2$, R-modulul M^* nu are P.I.S.D.*;

b) *Dacă D este fără-torsiune şi $M\neq D$, atunci*:

R-modulul M^* are P.I.S.D. dacă şi numai dacă I este finită.

***Demonstraţie*: a)** Dacă D este de torsiune, atunci, conform cu [75, p. 86] şi (1.2.2.2), oricare ar fi T şi S doi sumanzi direcţi idecompozabili, ai lui D,

$$Hom(T,S)=0.$$

Rezultă că are loc afirmaţia a) din enunţ.

b) Dacă D este fără-torsiune, atunci, cu conform cu [75, p. 86] şi (1.2.2.5), submodulul de torsiune T, al lui M, este un sumand direct (în M) şi:

$$M=D\oplus T\oplus U,$$

unde U este un sumand direct fără-torsiune şi total invariant în M, care este o sumă directă finită de R-module reduse, de rang unu şi cvasi-izomorfe, astfel încât $D\oplus U$ este total invariant în M. Fie I o mulţime oarecare de indici. Păstrând notaţia făcută mai sus, obţinem că:

$$M^*=D^*\oplus T^*\oplus U^*,$$

unde:

- $D^*=\oplus_I D$ este divizibil, fără-torsiune şi cu P.I.S.D., conform cu (3.2.1.2);
- $T^*=\oplus_I T(=\oplus_I(\oplus T_P)=\oplus(\oplus_I T_P))$, unde, conform ipotezei şi lui (1.2.3.1), T_P este un P-submodul primar elementar, pentru fiecare ideal prim P, al lui R; deci, conform lui (1.2.3.3), T^* are P.I.S.D.;

- $U^*=\oplus_I U(=\oplus_I(\bigoplus_{i=1}^{n} U_i)=\bigoplus_{i=1}^{n}(\oplus_I U_i))$ este un submodul fără-torsiune şi $D^*\oplus U^*$ este total invariant în M^*, unde mulţimea $\{U_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este formată din R-module fără-torsiune, reduse, de rang unu şi cvasi-izomorfe.

Rezultă că U^* este tot o sumă directă de R-module fără-torsiune, reduse, de rang unu şi cvasi-izomorfe. Din cele prezentate mai sus şi (2.1.4.2), rezultă că:

M^* are P.I.S.D. dacă şi numai dacă $D^*\oplus U^*$ are această proprietate,

ori, conform lui (1.2.2.5),

U^* are P.I.S.D. dacă şi numai dacă I este finită. □

Deoarece orice domeniu cu ideale principale este un inel Dedekind (vezi [75, p. 73]), din (1.2.2.6) şi (3.2.1.4), obţinem***:***

Corolarul 3.2.1.5: *Fie R un domeniu cu ideale principale şi*:

$M=D\oplus T\oplus U$,

unde:

- *$D\neq 0$ este un R-modul injectiv, fără-torsiune*;
- *U este un R-modul omogen, complet decompozabil, de rang finit*

şi:

- *T este un R-modul de torsiune ale cărui p-componente sunt elementare, pentru orice p aparţinând mulţimii P a tuturor elementelor prime neasociate, ale lui R.*

Atunci:

R-modulul M^* are P.I.S.D., pentru orice mulţime de indici I, dacă şi numai dacă I este finită. □

Se impun aici două observaţii:

Observaţia 3.2.1.6: *Afirmaţia de la (3.2.1.5) nu este adevărată în cazul în care*:

$D=T=0$.

Demonstraţie**:** Într-adevăr, în acest caz, conform lui (1.2.2.5), dacă U este un R-modul omogen, complet decompozabil, de rang finit, peste un domeniu cu ideale principale, atunci R-modulul U^* are P.I.S.D., pentru orice mulţime de indici I, nu neaparat finită. □

Observaţia 3.2.1.7: *În (3.2.1.4) condiţia ca „pentru fiecare ideal prim P (al lui R), P-componenta de torsiune M_P, a lui M, este un sumand direct, care este elementar", este fundamentală, căci, dacă această P-componentă este un R-modul ciclic, atunci, conform lui (1.2.1.3), pentru orice mulţime de indici I, cu $|I|\geq 2$, R-modulul M^* nu are P.I.S.D..* □

Încheiem această secţiune cu:

Propoziţia 3.2.1.8: *Fie R un inel artinian şi M un R-modul injectiv şi proiectiv, cu P.I.S.D., care are proprietatea că inelul endomorfismelor oricărui sumand direct idecompozabil este un domeniu cu ideale principale. Atunci, pentru orice mulţime de indici I, R-modulul M^* are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Dacă R şi M sunt ca şi în enunţ, atunci, conform cu (3.1.2.7)3),

$$M=\oplus_J E(S),$$

unde S este un R-modul simplu şi injectiv, iar J este o mulţime oarecare de indici. Rezultă că şi M^* are aceeaşi formă. Dacă End(E(S)) - inelul endomorfismelor învelitorii injective a R-modulului simplu S, este un domeniu cu ideale principale, atunci, conform lui (3.1.3.2), pentru orice mulţime de indici I, R-modulul M^* are P.I.S.D.. □

Din (3.2.1.8) şi (1.2.5.2) obţinem:

Corolarul 3.2.1.9: *Fie inelul R şi R-modulul M fără-torsiune, ca şi în (3.2.1.8). Atunci nucleul oricărui endomorfism al lui M^* este un sumand direct în M^*, care este (şi el) o sumă directă de exemplare de M.* □

3.2.2. Sume directe de grupuri abeliene cu P.I.S.D.

În această secţiune vom prezenta alte soluţii, decât cele prezentate în Secţiunea 1.2.6, ale „*Problemei 9**", pentru grupuri abeliene. În acest sens considerăm un grup abelian G, cu P.I.S.D., I o mulţime oarecare de indici, cu cel puţin două elemente (deci $|I|\geq 2$), şi:

$$G^*=\oplus_I G.$$

Începem cu grupurile elementare:

Observaţia 3.2.2.1: *Deoarece într-un grup elementar G, orice subgrup al său este un sumand direct (vezi [41, §17, p. 89]), rezultă că, pentru orice mulţime de indici I, G^* are P.I.S.D..* □

Pentru p-grupuri avem:

Propoziţia 3.2.2.2: *Dacă G este un p-grup, atunci*:

G^* are P.I.S.D., pentru orice mulţime de indici I, dacă şi numai dacă G este elementar.

***Demonstraţie*:** Fie G un p-grup cu P.I.S.D.. Atunci, conform lui (2.1.2.2), nu putem avea decât următoarele situaţii:

i) există un $n\in\mathbf{N}^*$ sau $n=\infty$, astfel încât:

$$G=\mathbf{Z}(p^n),$$

sau:

ii) există un cardinal m_p astfel încât:

$$G=(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))\oplus C_p,$$

unde:

$C_p=0$ sau $C_p=\mathbf{Z}(p^\infty)$.

Deoarece şi G^* este (tot) un p-grup, rezultă că dacă G^* are P.I.S.D., atunci, conform cu (1.2.1.3), el este elementar; deci şi G este elementar.

Reciproc, dacă G este elementar, atunci (3.2.2.1) completează demonstraţia propoziţiei. □

Corolarul 3.2.2.3: *Fie G un grup de torsiune. Atunci*:

G^* are P.I.S.D., pentru orice mulţime de indici I, dacă şi numai dacă G este elementar.

***Demonstraţie*:** Dacă G este un grup de torsiune cu P.I.S.D., atunci, conform cu (2.1.2.4), G este de forma:

$$G=(\bigoplus_{p\in P_0}\mathbf{Z}(p^{n_p}))\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}C_p), \qquad (10)$$

unde:

- P_0 şi P_1 sunt submulţimi disjuncte de numere prime;
- pentru orice $p\in P_0$, n_p este un număr natural, $n_p\geq 2$, şi pentru orice $p\in P_1$, m_p este un cardinal oarecare;
- $C_p=0$ sau $C_p=\mathbf{Z}(p^\infty)$.

Rezultă că:

$$G^*=(\oplus_I(\bigoplus_{p\in P_0}\mathbf{Z}(p^{n_p})))\oplus(\oplus_I(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))))\oplus(\oplus_I(\bigoplus_{p\in P_1}C_p))$$

$$=\bigoplus_{p\in P_0}(\oplus_I\mathbf{Z}(p^{n_p}))\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_I(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))))\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_I C_p)).$$

Conform cu (1.2.1.3), grupurile $\oplus_I\mathbf{Z}(p^{n_p})$ şi $\oplus_I C_p$ (dacă $C_p=\mathbf{Z}(p^\infty)$) nu au P.I.S.D.. Rezultă că dacă G^* are P.I.S.D., atunci:

$P_0=\varnothing$

şi, pentru orice $p\in P_1$,

$C_p=0$,

adică G este elementar.

Reciproc, dacă G este elementar, atunci, ca şi în (3.2.2.2), (3.2.2.1) completează demonstraţia. □

Din (3.2.2.3) şi (3.2.4.4) obţinem:

Corolarul 3.2.2.4: *Dacă $\{G_k\}_{k\in K}$ este o familie de grupuri elementare şi*:

$$G=\bigoplus_{k\in K}G_k,$$

atunci, pentru orice I şi J - două submulţimi ale lui K şi pentru orice:

$$f: \bigoplus_{j\in J} G_j \to \bigoplus_{i\in I} G_i$$

un morfism de grupuri, există o submulţime L a lui K astfel încât:

$$kerf=\bigoplus_{l\in L} G_l \qquad \text{şi} \qquad Imf\cong \bigoplus_{j\in J\setminus L} G_j.$$

În particular, orice endomorfism al grupului G are această proprietate. □

Observaţia 3.2.2.5: *Conform lui (3.2.2.4) şi [94, Corolarul 3.2], dacă $\{G_k\}_{k\in K}$ este o familie de grupuri elementare şi*:

$$G=\bigoplus_{k\in K} G_k,$$

atunci End(G) este un inel regular. □

Aplicând (3.2.1.2) la grupuri abeliene, sau utilizând (2.1.3.1) şi (2.1.3.5), obţinem:

Corolarul 3.2.2.6: *Fie G un grup abelian divizibil. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Pentru orice mulţime de indici I, grupul G^* are P.I.S.D.*;
2) *G este fără-torsiune*. □

Acum, pentru inelul **Q** - al numerelor raţionale obţinem:

Corolarul 3.2.2.7: *Următoarele afirmaţii sunt valabile pentru inelul **Q** al numerelor raţionale*:

1) ***Q** este un inel ereditar*;
2) *Pentru orice mulţime de indici I şi orice $f\in End(\oplus_I \mathbf{Q})$ există o submulţime J a lui I, astfel încât*:

   $$kerf=\oplus_J \mathbf{Q} \qquad \text{şi} \qquad Imf\cong\oplus_{I\setminus J}\mathbf{Q};$$

   deci, $End(\oplus_I \mathbf{Q})$ este un inel regular.

***Demonstraţie*: 1)** Ţinând cont de faptul că orice grup divizibil şi fără-torsiune este o sumă directă de exemplare de **Q**, afirmaţia din enunţ rezultă din (3.2.2.6), (1.2.6.2) şi (1.2.6.1).

2) Prima afirmaţie din enunţ, rezultă din (3.2.4.11) şi (3.2.4.12), iar a doua afirmaţie (din enunţ) rezultă din (3.2.4.9). □

Trecem acum la grupurile fără-torsiune.

Teorema 3.3.2.8: *Pentru un grup G fără-torsiune, au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Dacă G nu este redus, atunci*:

   grupul G^* are P.I.S.D. dacă şi numai dacă mulţimea I este finită;
2) *Dacă G este redus şi nu satisface la (1.1.11), atunci grupul G^* are P.I.S.D., pentru orice mulţime de indici I*;
3) *Dacă G este redus şi satisface la (1.1.11), atunci*:

   grupul G^* are P.I.S.D. dacă şi numai dacă mulţimea I este finită.

***Demonstraţie*:** Fie G un grup fără-torsiune, cu P.I.S.D.. Atunci, conform cu (2.1.4.3), avem trei cazuri:

i) Dacă G este neredus, atunci el este de forma:

$$G=(\oplus_m \mathbf{Q})\oplus(\oplus_n C) \qquad (13)$$

unde m este un cardinal oarecare, n este un număr natural, iar C este un grup redus, de rang unu. În acest caz (3.2.1.4)b) şi [75, p. 73] completează demonstraţia.

ii) Dacă G este redus şi nu satisface la condiţiile de la (1.1.11), atunci:

$$G=\bigoplus_{k\in K}(\oplus_{m_k} G_k), \qquad (14)$$

unde, pentru orice $k\in K$, m_k este un cardinal oarecare, iar G_k este un grup (redus) de rang unu şi, pentru orice $k_1, k_2\in K$, $t(G_{k_1})$ şi $t(G_{k_2})$ sunt incomparabile. Rezultă că:

$$G^*=\bigoplus_{k\in K} G_k^*,$$

unde, pentru orice $k\in K$, grupul:

$$G_k^*=\oplus_I(\oplus_{m_k} G_k)$$

este complet decompozabil şi omogen; deci, conform cu (1.1.7), G_k^* are P.I.S.D.. Deoarece, pentru orice $k\in K$, G_k^* este total invariant în G^*, din (1.1.2) rezultă că G^* are P.I.S.D..

iii) Dacă G este redus şi satisface la condiţiile de la (1.1.11), atunci:

$$G=(\oplus_n B)\oplus(\bigoplus_{k\in K} G_k), \qquad (15)$$

unde:

- n este un număr natural şi B este un grup (redus) de rang unu şi de tip ν;
- pentru orice $k\in K$, G_k este un grup (redus) de rang unu şi de tip μ_k, cu $\nu<\mu_k$, iar, pentru orice $k_1, k_2\in K$, $t(G_{k_1})$ şi $t(G_{k_2})$ sunt tipuri incomparabile.

Fie I o mulţime oarecare de indici şi:

$$G^*=B^*\oplus(\bigoplus_{k\in K} G_k^*),$$

unde,

$$B^*=\oplus_K(\oplus_n B)$$

şi, pentru orice $k\in K$, grupul:

$$G_k^*=\oplus_I G_k$$

este complet decompozabil şi omogen; deci, conform cu (1.1.7), G_k^* are P.I.S.D.. Acum enunţul rezultă din ceea ce am demonstrat la punctul ii) şi din (1.1.10) şi, respectiv (1.1.11). □

Deoarece grupurile libere sunt fără-torsiune şi nu satisfac la (1.1.11), din (2.1.1.2), (2.1.1.4) şi (3.2.2.8) obţinem:

Corolarul 3.2.2.9: *Dacă G este un grup liber (sau un grup liber numărabil, sau un grup liber de puterea continuului), atunci grupul G^* are P.I.S.D., pentru orice mulţime de indici I.* □

Pe de altă parte, tot din (3.2.2.8) obţinem:

Corolarul 3.2.2.10: *Dacă*:

$$G=\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{m_i} G_i)$$

este un grup ce satisface la (3.2.2.8)2), atunci, pentru orice f∈End(G), pentru orice i∈I şi orice crdinal m_i, există un cardinal $n_i \le m_i$ astfel încât:

$$kerf=\prod_{i\in I}(\oplus_{n_i} G_i).$$

***Demonstraţie*:** Pentru orice i∈I, notăm cu:

$$G_i^* = \oplus_{m_i} G_i.$$

Atunci:

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i^*$$

şi, conform cu (2.1.4.3), pentru orice i∈I, G_i^* este total invariant în G. Rezultă că:

$$End(G)=\prod_{i\in I} End(G_i^*);$$

deci orice f∈End(G) este de forma:

$$f=\{f_i^*\}_{i\in I},$$

unde, pentru orice i∈I, $f_i^* \in End(G_i^*)$, iar:

$$kerf=\prod_{i\in I} ker(f_i^*).$$

Acum (3.2.2.8)2) şi (1.2.5.5) completează demonstraţia. □

Din (2.1.5.6) rezultă că dacă:

$$G=A\oplus B,$$

unde A este un grup mixt şi B este fără-torsiune, iar G⊕G are P.I.S.D., atunci G are P.I.S.D. şi A este scindabil. Desigur că, aici, putem presupune că A este redus, căci dacă A este divizibil, atunci, conform lui (2.1.5.1), A este scindabil, fără ca A⊕A să aibă P.I.S.D..

Astfel că pentru grupurile mixte scindabile avem:

Propoziţia 3.2.2.11: *Fie*,

$$G=D\oplus T\oplus B$$

un grup mixt scindabil, cu P.I.S.D., unde D este fără-torsiune şi divizibil,

T=T(G)

este redus, iar B este fără-torsiune şi redus.

1) *Dacă D este nenul, atunci:*

grupul G^* are P.I.S.D. dacă şi numai dacă mulţimea I este finită şi, pentru orice număr prim p, p-componenta G_p, a lui G, este un p-grup elementar.

2) *Dacă D este nul, atunci:*

a) *dacă B nu satisface la (1.1.11), atunci:*

grupul G^* are P.I.S.D., pentru orice mulţime de indici I, dacă şi numai dacă, pentru orice număr prim p, p-componenta G_p, a lui G, este un p-grup elementar;

b) *dacă B satisface la (1.1.11), atunci:*

grupul G^* are P.I.S.D. dacă şi numai dacă mulţimea I este finită şi, pentru orice număr prim p, p-componenta G_p, a lui G, este un p-grup elementar.

***Demonstraţie*:** Conform lui (2.1.5.2), dacă G este un grup mixt scindabil cu P.I.S.D., atunci:

$$G=(\oplus_{m_0}\mathbf{Q})\oplus((\bigoplus_{p\in P_0}\mathbf{Z}(p^{n_p}))\oplus(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))\oplus B, \tag{16}$$

unde:

- m_0 este un cardinal oarecare, iar **Q** este grupul (aditiv) al numerelor raţionale;
- P_0 este o submulţime a mulţimii **P** a tuturor numerelor prime şi, pentru orice $p\in P_0$, n_p este un număr natural, $n_p\geq 2$;
- P_1 este tot o submulţime a mulţimii **P** a tuturor numerelor prime şi, pentru orice $p\in P_1$, m_p este un cardinal oarecare

şi:

- dacă $m_0\neq 0$, atunci B este un grup fără-torsiune, complet decompozabil, omogen, de rang finit şi astfel încât, pentru orice sumand direct H, de rang unu, al lui B, **Q**⊕H este total invariant în G, iar dacă:

  $m_0=0$,

  atunci B este orice grup fără-torsiune cu P.I.S.D..

Rezultă că:

$$G^*=(\oplus_I(\oplus_{m_0}\mathbf{Q}))\oplus(\oplus_I(\bigoplus_{p\in P_0}\mathbf{Z}(p^{n_p})))\oplus(\oplus_I(\bigoplus_{p\in P_1}(\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p)))\oplus(\oplus_I B).$$

1) Dacă G este neredus, atunci, conform lui (3.2.1.4)2) şi lui (3.2.2.3), G^* are P.I.S.D. exact dacă I este o mulţime finită şi T(G) este elementar.
2) Dacă G este redus, atunci:

$$m_0=0$$

şi, conform cu (2.1.5.4), B poate fi orice grup redus, fără-torsiune, cu P.I.S.D.. Atunci (3.2.2.3) şi (3.2.2.8)2),3) completează demonstraţia. □

Se ştie că dacă G este un grup abelian astfel încât G^* are P.I.S.D., atunci End(G) - inelul endomorfismelor grupului G, are anumite proprietăţi, de exemplu: End(G) poate fi un domeniu cu ideale principale, un inel local, sau un inel semi-local. Reciproca acestei afirmaţii, în general, nu este adevărată. De aceea se cuvine să facem aici următoarele observaţii referitoare la „*Problema 9**”, pentru grupuri abeliene:

Observaţiile 3.2.2.12: *Fie G un grup abelian cu P.I.S.D. şi End(G) - inelul endomorfismelor lui G. Atunci, în nici una din următoarele cazuri, nu rezultă că G^* are P.I.S.D.*:

1) *dacă End(G) este un inel cu ideale principale*;
2) *dacă End(G) este un inel local*;
3) *dacă End(G) este un inel semi-local.*

***Demonstraţie*: 1)** Contraexemplu: fie,

$$G=\mathbf{Z}(4).$$

Atunci:

$$End(G)\cong G$$

este un inel cu ideale principale, dar, conform cu (3.2.2.2), G^* nu are P.I.S.D..
2) Contraexemplu: fie,

$$G=\mathbf{Z}(p^\infty).$$

Atunci End(G) este un inel local, dar, conform cu (3.2.2.6), G^* nu are P.I.S.D..
3) Contraexemplu: fie,

$$G=\mathbf{Q}\oplus\mathbf{Z}(p^\infty).$$

Atunci, conform cu [24, Propoziţia 3.1], End(G) este un inel semi-local, dar, conform cu (3.2.2.6), G^* nu are P.I.S.D.. □

3.2.3. Morfisme de sume directe de module

În această secţiune vom prezenta descrieri ale morfismelor de sume directe de R-module, descrieri care în secţiunea următoare vor fi utilizate pentru a caracteriza unele sume directe de R-module cu P.I.S.D.. Astfel (peste tot în această secţiune) vom considera:

- un inel asociativ, comutativ, cu unitate, notat cu R;

- $\{M_j\}_{j\in J}$ şi $\{N_i\}_{i\in I}$ două familii de R-module

şi:

- un morfism oarecare de R-module,

$$f : \bigoplus_{j\in J} M_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i,$$

unde I şi J sunt două mulţimi (oarecari) de indici.

Vom descrie aici imaginile şi nucleele unor astfel de morfisme.

Fie, deci, R, $\{M_j\}_{j\in J}$, $\{N_i\}_{i\in I}$ şi:

$$f : \bigoplus_{j\in J} M_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i$$

ca şi mai sus. Atunci f induce o familie dublu indexată:

$$\{ f_j^i : M_j \to N_i\}_{(i,j)\in I\times J},$$

unde:

$$f_j^i = p^i\circ f\circ u_j, \qquad u_j : M_j \to \bigoplus_{j\in J} M_j$$

este a j-a injecţie canonică,

$$p^i : \bigoplus_{i\in I} N_i \to N_i$$

este a i-a proiecţie canonică, iar aceste aplicaţii fac comutativă următoarea diagramă:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus\limits_{j\in J} M_j & \xrightarrow{f} & \bigoplus\limits_{i\in I} N_i \\ u_j \uparrow & & \downarrow p^i. \\ M_j & \xrightarrow{f_j^i} & N_i \end{array} \qquad (66)$$

Definim funcţiile:

$$f_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i, \qquad f_j = f\circ u_j$$

şi:

$$f^i : \bigoplus_{j\in J} M_j \to N_i, \qquad f^i = p^i\circ f.$$

Dacă $m_j\in M_j$, atunci:

$$u_j(m_j)=(\ldots,0,m_j,0,\ldots)\in \bigoplus_{j\in J} M_j,$$

iar:

$$f_j(m_j)=(f\circ u_j)(m_j)=f((\ldots,0,m_j,0,\ldots))= n_{i_1} + n_{i_2} +\ldots+ n_{i_k},$$

unde $k\in \mathbf{N}^*$ şi, pentru orice $l=1, 2, \ldots, k$, $n_{i_l} \in N_{i_l}$, iar $i_1, i_2, \ldots, i_k\in I$. Deci:

$$f_j^i(m_j)=\begin{cases}0, i \notin \{i_1, i_2, ..., i_k\}\\ n_{i_l}, i \in \{i_1, i_2, ..., i_k\}\end{cases}.$$

Rezultă că, pentru orice $j\in J$ şi orice $m_j\in M_j$, mulţimea $\{f_j^i(m_j)\}_{i\in I}$ este finită, adică: pentru orice $j\in J$, familia $\{f_j^i\}_{i\in I}$ este aproape peste tot trivială.

Presupunem că:

$$f, g : \bigoplus_{j\in J} M_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i$$

sunt două morfisme de R-module care induc familiile dublu indexate:

$$\{f_j^i : M_j \to N_i\}_{(i,j)\in I\times J} \qquad \text{şi} \qquad \{g_j^i : M_j \to N_i\}_{(i,j)\in I\times J}$$

de morfisme de R-module astfel încât, pentru orice $j\in J$ şi orice $i\in I$,

$$f_j^i = g_j^i.$$

Atunci:

$$p^i\circ f\circ u_j = p^i\circ g\circ u_j;$$

deci, pentru orice $j\in J$ şi orice $m_j\in M_j$, $f((...,0,m_j,0,...))$ şi $g((...,0,m_j,0,...))$ au aceeaşi componentă în fiecare N_i. Deoarece f şi g sunt morfisme de R-module, rezultă că:

$$f=g.$$

Reciproc, fie:

$$\{f_j^i : M_j \to N_i\}_{(i,j)\in I\times J}$$

o familie dublu indexată de morfisme de R-module cu proprietatea că, pentru orice $j\in J$, familia $\{f_j^i\}_{i\in I}$ este aproape peste tot trivială, adică, pentru orice $j\in J$ şi orice $m_j\in M_j$, mulţimea $\{f_j^i(m_j)\}_{i\in I}$ este finită. Pentru un $m_j\in M_j$, notăm cu:

$$S(m_j)=\{i\in I \mid f_j^i(m_j)\neq 0\}.$$

Conform ipotezei, pentru orice $j\in J$ şi orice $m_j\in M_j$, mulţimea $S(m_j)$ este finită. Acum, pentru orice $j\in J$, definim:

$$f_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i$$

astfel: dacă $m_j\in M_j$, atunci,

$$f_j(m_j)= \sum_{i\in S(m_j)} f_j^i(m_j) = \sum_{i\in I} f_j^i(m_j).$$

Se verifică imediat că f_j este un morfism de R-module. Acum putem defini aplicaţia:

$$f : \bigoplus_{j\in J} M_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i,$$

prin: pentru orice $m_{j_1}+m_{j_2}+\ldots+m_{j_k}\in M_{j_1}+M_{j_2}+\ldots+M_{j_k}$,

$$f(m_{j_1}+m_{j_2}+\ldots+m_{j_k})=f_{j_1}(m_{j_1})+f_{j_2}(m_{j_2})+\ldots+f_{j_k}(m_{j_k})\in\bigoplus_{i\in I}N_i.$$

Desigur că aplicaţia f, astfel definită, este un morfism de R-module.

Observaţia 3.2.3.1: *Dacă, pentru orice $j\in J$ şi orice $i\in I$, f_j^i, f_j şi f sunt ca şi mai sus, atunci cele două triunghiuri şi dreptunghiul de mai jos sunt comutative*:

$$\begin{array}{ccc} M_j & \xrightarrow{f_j^i} & N_i \\ u_j\downarrow & \searrow f_j & \uparrow p^i \\ \bigoplus_{j\in J}M_j & \xrightarrow{f} & \bigoplus_{i\in I}N_i \end{array} \qquad (67)$$

□

De asemenea, putem defini următorul morfism de R-module:

$$f^i:\bigoplus_{j\in J}M_j\to N_i,$$

prin: dacă,

$$m=m_{j_1}+m_{j_2}+\ldots+m_{j_k}\in\bigoplus_{j\in J}M_j,$$

atunci:

$$f^i(m)=f_{j_1}^i(m_{j_1})+f_{j_2}^i(m_{j_2})+\ldots+f_{j_k}^i(m_{j_k}).$$

Observaţia 3.2.3.2: *Dacă, pentru orice $j\in J$ şi orice $i\in I$, f_j^i, f^i şi f sunt ca şi mai sus şi*:

$$\bar{f}:\bigoplus_{j\in J}M_j\to\bigoplus_{i\in I}N_i$$

este definită de: pentru orice $m\in\bigoplus_{j\in J}M_j$,

$$\bar{f}(m)=\sum_{i\in I}f^i(m),$$

atunci:

$$\bar{f}=f$$

şi cele două triunghuri şi dreptunghiul de mai jos sunt comutative:

$$\begin{array}{ccc} M_j & \xrightarrow{f_j^i} & N_i \\ u_j\downarrow & \nearrow f^i & \uparrow p^i \\ \bigoplus_{j\in J}M_j & \xrightarrow{\bar{f}=f} & \bigoplus_{i\in I}N_i \end{array} \qquad (68)$$

□

Observăm că orice sistem dublu indexat de morfisme de R-module:

$\{ f_j^i : M_j \to N_i \}_{(i,j)\in I\times J}$

poate fi reprezentat sub forma unei matrici de ordin I×J. Dacă notăm cu $M^*_{I\times J}$ mulţimea matricilor de ordin I×J, a căror elemente sunt morfisme de R-module:

$f_j^i : M_j \to N_i$,

cu proprietatea că, pentru orice $j\in J$, familia $\{ f_j^i \}_{i\in I}$ este aproape peste tot trivială, şi notăm cu:

$A(f)=A(f_j^i)\in M^*_{I\times J}$

- matricea determinată de (sau care determină) aplicaţia f, atunci avem următorul rezultat:

Teorema 3.2.3.3: *Există un izomorfism de R-module*:

$\Psi : Hom(\bigoplus_{j\in J} M_j, \bigoplus_{i\in I} N_i) \to M^*_{I\times J}$,

definit astfel: pentru orice $f\in Hom(\bigoplus_{j\in J} M_j, \bigoplus_{i\in I} N_i)$,

$\Psi(f)=A(f)\in M^*_{I\times J}$.

***Demonstraţie*:** Adunarea obişnuită a matricelor şi înmulţirea acestora cu un scalar din R determină pe $M^*_{I\times J}$ o structură de R-modul. Din cele demonstrate mai sus, rezultă că aplicaţia Ψ este o bijecţie. Demonstrăm, acum, că Ψ este un morfism. Dacă $f, g\in Hom(\bigoplus_{j\in J} M_j, \bigoplus_{i\in I} N_i)$ şi $r\in R$, atunci, deoarece:

$u_j : M_j \to \bigoplus_{j\in J} M_j$

este a j-a injecţie canonică, iar:

$p^i : \bigoplus_{i\in I} N_i \to N_i$

este a i-a proiecţie canonică, rezultă că:

$\Psi(f+g)=A(f+g)=A(f_j^i+g_j^i)=A(f_j^i)+A(g_j^i)=A(f)+A(g)=\Psi(f)+\Psi(g)$

şi:

$\Psi(r\cdot f)=A(r\cdot f)=A(r\cdot f_j^i)=rA(f_j^i)=rA(f)=r\Psi(f)$. □

Corolarul 3.2.3.4: *Dacă* $\{M_i\}_{i\in I}$ *este o familie de R-module, atunci algebra endomorfismelor R-modulului* $\bigoplus_{i\in I} M_i$*, faţă de adunarea şi compunerea obişnuită a funcţiilor*

şi înmulţirea acestora cu un scalar, este izomorfă cu algebra matricilor pătratice M_I^**, a căror elemente sunt morfisme*:

$$f_j^i : M_j \to M_i$$

cu proprietatea că, pentru orice $j \in J$*, familia* $\{f_j^i\}_{i \in I}$ *este aproape peste tot trivială, algebră socotită în raport cu adunarea şi înmulţirea obişnuită a matricilor şi înmulţirea acestora cu un scalar din R*.

***Demonstraţie*:** Fie f, $g \in End(\bigoplus_{i \in I} M_i)$ şi Ψ - aplicaţia din Teorema 3.2.3.3. Dacă familia (de morfisme):

$$\{f_j^i : M_j \to M_i\}_{(i,j) \in I \times I}$$

este determinată de f, iar familia:

$$\{g_i^k : M_i \to M_k\}_{(k,i) \in I \times I}$$

este determinată de g, atunci $g \circ f$ determină familia:

$$\{\sum_{i \in I} g_i^k \circ f_j^i : M_j \to M_k\}_{(k,j) \in I \times I}.$$

Dacă, pentru orice $j \in I$, familia $\{f_j^i\}_{i \in I}$ este aproape peste tot trivială şi, pentru orice $i \in I$, familia $\{g_i^k\}_{k \in I}$ este aproape peste tot trivială, atunci rezultă că, pentru orice $j \in I$, familia $\{\sum_{i \in I} g_i^k \circ f_j^i\}_{(k,j) \in I \times I}$ este (şi ea) aproape peste tot trivială - verificarea acestui fapt este imediată. Deoarece:

$$A(g \circ f) = A(\sum_{i \in I} g_i^k \circ f_j^i) = A(g_i^k) \cdot A(f_j^i) = A(g) \cdot A(f),$$

rezultă că Ψ este un izomorfism de algebre. □

Corolarul 3.2.3.5: *Dacă M este un R-modul, atunci inelul endomorfismelor R-modulului* $\oplus_I M$ *este izomorf cu inelul matricilor pătratice* M_I^**, a căror elemente sunt endomorfisme ale lui M şi a căror coloane au un număr finit de elemente nenule, inel socotit în raport cu adunarea şi înmulţirea obişnuită a matricelor*. □

În continuare, pentru un morfism:

$$f : \bigoplus_{j \in J} M_j \to \bigoplus_{i \in I} N_i$$

vom prezenta o listă cu câteva proprietăţi elementare referitoare la kerf şi Imf, rezultate care în secţiunea următoare vor fi folosite pentru a caracteriza sumele directe de R-module cu P.I.S.D..

Propoziţia 3.2.3.6: *Fie R un inel asociativ, comutativ, cu unitate,* $\{M_j\}_{j \in J}$ *şi* $\{N_i\}_{i \in I}$ *două familii de R-module. Dacă*:

$$f : \bigoplus_{j\in J} M_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i$$

este un morfism (de R-module), atunci au loc următoarele relaţii:

1) $kerf=\bigcap_{i\in I}\ker f^i$, (69)

2) $Imf=\bigoplus_{i\in I} Imf^i=\bigoplus_{i\in I}(\sum_{j\in J}\mathrm{Im} f_j^i)$, (70)

3) $\bigoplus_{j\in J} kerf_j \leq kerf$, (71)

4) *Pentru orice* $j\in J$,

$$kerf_j=\bigcap_{i\in I}\ker f_j^i, \quad (72)$$

şi:

$$Imf_j=\bigoplus_{i\in I} Im\, f_j^i, \quad (73)$$

5) *Pentru orice* $i\in I$,

$$\bigoplus_{j\in J} ker\, f_j^i \leq kerf^i, \quad (74)$$

şi:

$$Imf^i=\sum_{j\in J}\mathrm{Im} f_j^i\ . \quad (75)$$

***Demonstraţie*: 1)** Fie $m\in\bigoplus_{j\in J} M_j$. Atunci:

$m\in kerf$ dacă şi numai dacă $f(m)=\sum_{i\in I} f^i(m)=0$,

ceea ce, datorită unicităţii descompunerii lui 0 într-o sumă directă, este echivalent cu faptul că, pentru orice $i\in I$,

$f^i(m)=0$.

Deci are loc relaţia (69).

2) Egalităţile (70) rezultă din definiţia lui f^i.

3) Dacă:

$$m=m_{j_1}+m_{j_2}+\ldots+m_{j_k}\in\bigoplus_{j\in J} kerf_j,$$

unde, pentru orice l=1, 2, …, k, $m_{j_l}\in\ker f_{j_l}$, atunci:

$$f(m)=f(m_{j_1}+m_{j_2}+\ldots+m_{j_k})=f_{j_1}(m_{j_1})+f_{j_2}(m_{j_2})+\ldots+f_{j_k}(m_{j_k})=0;$$

deci $m\in kerf$.

4) Pentru fiecare $j\in J$, considerăm un $m_j\in M_j$. Atunci:

$m_j \in \ker f_j$ dacă şi numai dacă, pentru orice $i \in I$, $f_j^i(m_j)=0$;

adică, pentru orice $i \in I$, $m_j \in \ker f_j^i$. Aşadar, are loc egalitatea (72). Egalitatea (73) rezultă din definiţiile lui f_j şi f_j^i.

5) Ambele egalităţi ((74) şi (75)) se obţin din definiţiile lui f^i şi f_j^i. □

Se impum aici câteva observaţii.

Observaţii 3.2.3.7: 1) *În general, în relaţia (71) nu are loc egalitate.*

2) *În general, în relaţia (74) nu are loc egalitate.*

3) *În relaţia (74) are loc egalitate dacă şi numai dacă în relaţia (75) suma este directă. Aşadar, pentru orice* $i \in I$:

$$\ker f^i = \bigoplus_{j \in J} \ker f_j^i, \tag{76}$$

dacă şi numai dacă:

$$\operatorname{Im} f^i = \bigoplus_{j \in J} \operatorname{Im} f_j^i. \tag{77}$$

4) *În relaţia (75) suma este directă dacă şi numai dacă următoarea egalitate are loc*:

$$\ker f = \bigcap_{i \in I} \Big(\bigoplus_{j \in J} \ker f_j^i\Big). \tag{78}$$

5) *Dacă mulţimea de indici J este finită şi* $\bigoplus_{j \in J} M_j$ *are laticea (tuturor) submodulelor (sale) distributivă, atunci în relaţia (74) are loc egalitate. În acest caz are loc (şi) următoarea egalitate*:

$$\ker f = \bigoplus_{j \in J} \Big(\bigcap_{i \in I} \ker f_j^i\Big). \tag{79}$$

6) *Dacă mulţimea de indici J este finită, în relaţia (74) suma este directă şi* $\bigoplus_{j \in J} M_j$ *are laticea (tuturor) submodulelor (sale) distributivă, atunci are loc următoarea egalitate*:

$$\bigcap_{i \in I} \Big(\bigoplus_{j \in J} \ker f_j^i\Big) = \bigoplus_{j \in J} \Big(\bigcap_{i \in I} \ker f_j^i\Big). \tag{80}$$

***Demonstraţie*: 1)** Contraexemplu: fie,

$f_1 : \mathbf{Z}(4) \to \mathbf{Z}(8)$,

unde, pentru orice $\hat{x} \in \mathbf{Z}(4)$,

$f_1(\hat{x}) = \overline{2x} \pmod 8$, $\quad f_2 : \mathbf{Z}(8) \to \mathbf{Z}(8)$,

unde, pentru orice $\bar{y} \in \mathbf{Z}(8)$,

$f_2(\bar{y}) = \overline{2y} \pmod 8$

şi:

$$f : \mathbf{Z}(4)\oplus\mathbf{Z}(8) \to \mathbf{Z}(8),$$

unde, pentru orice $\hat{x}+\bar{y}\in\mathbf{Z}(4)\oplus\mathbf{Z}(8)$,

$$f(\hat{x}+\bar{y})=f_1(\hat{x})+f_2(\bar{y})=\overline{2x}+\overline{2y}.$$

Se verifică imediat că:

$$\ker f_1=\{\hat{0}\}, \qquad \ker f_2=\{\bar{0},\bar{4}\},$$

$$\ker f_1\oplus\ker f_2=\{(\hat{0},\bar{0}), (\hat{0},\bar{4})\}$$

şi:

$$\ker f=\{(\hat{0},\bar{0}), (\hat{0},\bar{4}), (\hat{1},\bar{3}), (\hat{1},\bar{7}), (\hat{2},\bar{2}), (\hat{2},\bar{6}), (\hat{3},\bar{1}), (\hat{3},\bar{5})\}.$$

2) Vezi contraexemplul de la punctul 1).

3) Presupunem că în relaţia (75) suma este directă. Fie:

$$m=m_{j_1}+m_{j_2}+\ldots+m_{j_k}\in\ker f^i,$$

cu $k\in\mathbf{N}^*$ şi, pentru orice $l=1, 2, \ldots, k$, $m_{j_l}\in M_{j_l}$. Atunci:

$$0=f^i(m)=f^i(m_{j_1}+m_{j_2}+\ldots+m_{j_k})$$

$$=f^i_{j_1}(m_{j_1})+f^i_{j_2}(m_{j_2})+\ldots+f^i_{j_k}(m_{j_k})\in\bigoplus_{l=1}^{n}\operatorname{Im} f^i_{j_l}.$$

Datorită unicităţii reprezentării lui 0 într-o sumă directă, rezultă că, pentru orice $l=1, 2, \ldots, k$,

$$f^i_{j_l}(m_{j_l})=0;$$

adică $m_{j_l}\in\ker f^i_{j_l}$. Aşadar:

$$m=m_{j_1}+m_{j_2}+\ldots+m_{j_k}\in\ker f^i_{j_1}+\ker f^i_{j_2}+\ldots+\ker f^i_{j_k}$$

$$=\bigoplus_{l=1}^{n}\ker f^i_{j_l}\leq\bigoplus_{j\in J}\ker f^i_j.$$

Deci $\ker f^i\subseteq\bigoplus_{j\in J}\ker f^i_j$ şi, conform relaţiei (74), are loc egalitatea (76).

Reciproc, presupunem că are loc egalitatea (76). Fie j_1 un element oarecare al lui J şi $y\in\operatorname{Im} f^i_{j_1}\cap(\sum_{j\in J\setminus\{j_1\}}\operatorname{Im} f^i_j)$. Atunci există un $k\in\mathbf{N}^*$ şi, pentru orice $l=1, 2, \ldots, k$, există un $m_{j_l}\in M_{j_l}$, astfel încât:

$$y=f^i_{j_1}(m_{j_1})=f^i_{j_2}(m_{j_2})+\ldots+f^i_{j_k}(m_{j_k}).$$

Rezultă că:

$$f^i_{j_1}(m_{j_1})-f^i_{j_2}(m_{j_2})-\ldots-f^i_{j_k}(m_{j_k})=0;$$

deci:

$$f^i(m_{j_1}-m_{j_2}-\ldots-m_{j_k})=0.$$

Aşadar, $m_{j_1}-m_{j_2}-\ldots-m_{j_k}\in\ker f^i$. Conform ipotezei, pentru orice l=1, 2, …, k,

$$f^i_{j_l}(m_{j_l})=0;$$

deci:

$$y=0$$

şi are loc egalitatea (77).

4) Egalitatea din enunţ rezultă din egalitatea (69) şi din cele demonstrate la punctul precedent.

5) Deoarece $\ker f\subseteq\bigoplus_{j\in J}M_j$, rezultă, conform ipotezei, că:

$$\ker f=\ker f\cap(\bigoplus_{j\in J}M_j)=\bigoplus_{j\in J}(\ker f\cap M_j)=\bigoplus_{j\in J}\ker f_j.$$

Acum, egalitatea (79) rezultă din egalitatea (72).

6) Egalitatea din enunţ rezultă din egalităţile (78) şi, respectiv (79). □

În finalul acestei secţiuni vom prezenta un caz în care în relaţia (71) are loc egalitate. Se ştie că dacă R-modulul M are proprietatea că End(M) este un inel regular, atunci, pentru orice N - sumand direct în M, inelul endomorfismelor lui N este regular, dar reciproca, în general, este falsă, adică: dacă,

$$M=\bigoplus_{k\in K}M_k$$

şi, pentru orice $k\in K$,

$$E_k=End(M_k)$$

este un inel regular, nu rezultă că:

$$E=End(M)$$

este (şi el) un inel regular - vezi [94, Lema 3.3, Exemplul 3.4]. Următorul rezultat arată că acest lucru este adevărat dacă $\{M_k\}_{k\in K}$ este o familie de sumanzi direcţi total invarianţi ai lui M, caz în care în relaţia (71) are loc egalitate.

Propoziţia 3.2.3.8: *Fie*,

$$M=\bigoplus_{k\in K}M_k$$

un R-modul astfel încât:

1) *pentru orice $k\in K$, End(M_k) este un inel regular*,

2) *pentru orice $k\in K$, M_k este total invariant în M.*

Atunci au loc următoarele afirmaţii:

a) *În relaţia (71) are loc egalitate*;

b) *End(M) este un inel regular*;

c) *End(M) este un produs direct de inele regulare*.

***Demonstraţie*: a)** Fie f un endomorfism al lui M. Conform ipotezei, rezultă că, pentru orice i, j$\in$K, i$\neq$j,

$$Hom(M_i,M_j)=Hom(M_j,M_i)=0.$$

Deci, pentru orice i, j$\in$K, i$\neq$j, şi pentru orice morfism:

$$f_j^i : M_j \to M_i,$$

$\ker f_j^i = M_j$ şi $\mathrm{Im}\, f_j^i = 0$.

Dacă:

$$f^i : M \to M_i,$$

atunci:

$$\mathrm{Im} f^i = \mathrm{Im}\, f_j^i.$$

Deoarece End(M_i) este un inel regular, rezultă că $\mathrm{Im}\, f_i^i$ este un sumand direct în M_i. În acest caz, din (3.2.3.6) rezultă că Imf este un sumand direct în M. Pe de altă parte,

$$\ker f_j = \ker f_j^j$$

este un sumand direct în M_j. Dacă:

$$m = m_{j_1} + m_{j_2} + \ldots + m_{j_k} \in \ker f,$$

unde, pentru orice l=1, 2, …, k, $m_{j_l} \in M_{j_l}$, atunci:

$$f(m_{j_1} + m_{j_2} + \ldots + m_{j_k}) = f_{j_1}(m_{j_1}) + f_{j_2}(m_{j_2}) + \ldots + f_{j_k}(m_{j_k})$$
$$= f_{j_1}^{j_1}(m_{j_1}) + f_{j_2}^{j_2}(m_{j_2}) + \ldots + f_{j_k}^{j_k}(m_{j_k}) = 0,$$

adică, pentru orice l=1, 2, …, k, $m_{j_l} \in \ker f_{j_l}^{j_l}$. Aşadar, în relaţia (70) are loc egalitate.

b) Afirmaţia din enunţ rezultă din cele demonstrate la punctul a) şi din [94, Corolarul 3.2].

c) Această afirmaţie rezultă din cea de a doua afirmaţie a ipotezei. □

3.2.4. Aplicaţii la sume directe de module cu P.I.S.D.

În această secţiune vom aplica rezultatele obţinute în secţiunea precedentă la sume directe de R-module cu P.I.S.D.. Începem cu următorul rezultat:

Propoziţia 3.2.4.1: *Fie $\{M_k\}_{k\in K}$ o familie de R-module cu proprietatea că*:

$$M = \bigoplus_{k\in K} M_k$$

are C.P.I.S.D.. Atunci, pentru orice I şi J - două submulţimi disjuncte (oarecari) ale lui K şi pentru orice morfism de R-module:

$$f : \bigoplus_{j\in J} M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i,$$

are loc egalitatea:

$$kerf=D\oplus(\bigoplus_{j\in J} kerf_j), \tag{81}$$

unde, pentru orice $j\in J$,

$$f_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$$

are semnificaţia din secţiunea (3.2.3), iar D este un sumand direct în M.

***Demonstraţie*: Presupunem că $\{M_k\}_{k\in K}$,

$$M=\bigoplus_{k\in K} M_k,$$

I, J şi f sunt ca şi în enunţ. Atunci M are P.I.S.D. şi, conform cu (1.2.1.3), kef este un sumand direct în M. Din (1.2.1.1) şi (1.1.1) rezultă că, pentru orice $i\in I$ şi orice $j\in J$, $M_j\oplus M_i$ are P.I.S.D. şi deci $\ker f_j^i$ este un sumand direct în M_j. Deoarece, pentru orice $j\in J$, M_j are (şi el) C.P.I.S.D., rezultă că:

$$kerf_j=\bigcap_{i\in I}\ker f_i^j$$

este un sumand direct în M_j. Atunci $\bigoplus_{j\in J} kerf_j$ este un sumand direct în M. Rezultă că are loc egalitatea (81). □

Se impun aici câteva observaţii:

Observaţii 3.2.4.2: 1) *Pentru orice* $j\in J$,

$$D\cap M_j=0.$$

2) *Dacă*:

$$m=m_{j_1}+m_{j_2}+...+m_{j_k}\in D,$$

unde $k\in \mathbf{N}^*$ *şi, pentru orice l=1, 2, ..., k,* $m_{j_l}\in M_{j_l}$, *atunci*:

oricare ar fi $j_r\in\{1,2,...,k\}$, *există un* $j_s\in\{1,2,...,k\}$, $j_r\neq j_s$, *astfel încât*:

$$An(m_{j_r})=An(m_{j_s});$$

în particular, dacă există un $j_r\in\{1,2,...,k\}$ *astfel încât* m_{j_r} *este fără-torsiune, atunci (mai) există un* $j_s\in\{1,2,...,k\}$, $j_r\neq j_s$, *cu proprietatea că* m_{j_s} *este (şi el) fără-torsiune. (Aici An(m) notează anulatorul lui m.)*

3) *Există R-module pentru care sumandul D din relaţia (81) este 0.*

***Demonstraţie*: 1)** Deoarece, pentru orice $j\in J$,

$$D\cap M_j\subseteq kerf\cap M_j=kerf_j,$$

rezultă că:

$$D\cap M_j=0.$$

2) Dacă oricare ar fi j_r, $j_s \in \{1,2,\ldots,k\}$, $j_r \neq j_s$, au proprietatea că $An(m_{j_r}) \neq An(m_{j_s})$, atunci, pentru orice l=1, 2, …, k, $m_{j_l} \in \ker f_{j_l}$ - ceea ce contrazice relaţia din enunţ.

3) Contraexemplu: fie $\{p_k\}_{k\in K}$ o familie de elemente prime (neasociate) din R şi fie $\{M_k\}_{k\in K}$ o familie de p_k-R-module elementare. Atunci, din (1.2.3.3), (1.2.3.2) şi (3.2.4.1), rezultă că oricare ar fi I şi J - două submulţimi disjuncte ale lui K şi oricare ar fi:

$$f: \bigoplus_{j\in J} M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$$

un morfism de R-module, are loc egalitatea:

$$\ker f = \bigoplus_{j\in J} \ker f_j. \quad \square \qquad (82)$$

O consecinţă imediată a lui (3.2.4.1) este:

Corolarul 3.2.4.3: *Fie $\{M_k\}_{k\in K}$ o familie de R-module cu proprietatea că*:

$$M = \bigoplus_{k\in K} M_k$$

are inelul endomorfismelor regular. Atunci, pentru orice I şi J - două submulţimi finite şi disjuncte ale lui K şi pentru orice morfism de R-module:

$$f: \bigoplus_{j\in J} M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i,$$

are loc egalitatea (81).

***Demonstraţie*:** Dacă End(M) este un inel regular, atunci şi $\bigcup_{k\in I\cup J} M_k$ are inelul endomorfismelor regular, conform cu [94, Lema 3.3]. Din [94, Corolarul 3.2] rezultă că, pentru orice $\varphi \in End(\bigcup_{k\in I\cup J} M_k)$, $\ker\varphi$ este un sumand direct în $\bigcup_{k\in I\cup J} M_k$. Conform cu (3.1.1.1), rezultă că $\bigcup_{k\in I\cup J} M_k$ are P.I.S.D.. Atunci, pentru orice morfism de R-module:

$$f: \bigoplus_{j\in J} M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i,$$

kerf este un sumand direct în $\bigoplus_{j\in J} M_j$. Deoarece I şi J sunt disjuncte, rezultă că, pentru orice $i \in I$ şi orice $j \in J$, $M_j \oplus M_i$ are P.I.S.D. şi, deci, $\ker f_j^i$ este un sumand direct în M_j. Pe de altă parte, pentru orice $j \in J$, M_j are (şi el) P.I.S.D.; deci:

$$\ker f_j = \bigcap_{i\in I} \ker f_j^i$$

este un sumand direct în M_j. În continuare raţionăm ca şi la (3.2.4.1). $\square$

În Secţiunea 3.1.1 am demonstrat că mulţimea R-modulelor M cu proprietatea că End(M) este un inel regular este strict inclusă în mulţimea R-modulelor cu P.I.S.D.. În continuarea acestei secţiuni vom prezenta câteva cazuri în care proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi pentru un R-modul M implică End(M) - inel regular. Începem prin a descrie nucleele şi imaginile morfismelor, respectiv ale endomorfismelor, de R-module semi-simple, module care au C.P.I.S.D. şi al căror inel de endomorfisme este regular.

Teorema 3.2.4.4: *Dacă* $\{M_k\}_{k\in K}$ *este o familie de R-module simple şi*:

$$M=\bigoplus_{k\in K} M_k,$$

atunci, pentru orice I şi J - două submulţimi ale lui K şi pentru orice morfism de R-module:

$$f:\bigoplus_{j\in J} M_k \to \bigoplus_{i\in I} M_i,$$

există o submulţime L a lui K astfel încât:

$$kerf=\bigoplus_{k\in L} M_k \qquad \text{şi} \qquad Imf\cong \bigoplus_{k\in J\setminus L} M_k.$$

***Demonstraţie*:** Fie,

$$\mathrm{f}:\bigoplus_{j\in J} \mathrm{M_j} \to \bigoplus_{i\in I} \mathrm{M_i}$$

un morfism de R-module şi:

$$\{ f_j^i : M_j \to N_i\}_{(i,j)\in I\times J}$$

- familia dublu indexată de morfisme de R-module determinată de f, cu proprietatea că, pentru orice $j\in J$, familia $\{ f_j^i \}_{i\in I}$ este aproape peste tot trivială, conform Secţiunii 3.2.3. Deoarece $\ker f_j^i$ este un sumand direct în M_j, conform ipotezei,

$$\ker f_j^i=0 \qquad \text{sau} \qquad \ker f_j^i=M_j.$$

Dacă:

$$f_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i, \qquad f_j=f\circ u_j$$

are aceeaşi semnificaţie ca şi în secţiunea precedentă, atunci, conform relaţiei (69),

$$\ker f_j=0 \qquad \text{sau} \qquad \ker f_j=M_j.$$

Aşadar $\ker f_j$ este un sumand direct trivial în M_j, caz în care există o submulţime L a lui J astfel încât:

$$\bigoplus_{j\in J} \ker f_j=\bigoplus_{k\in L} M_k,$$

care este, astfel, un sumand direct în $\bigoplus_{j\in J} M_j$. Deoarece $\bigoplus_{j\in J} M_j$ este un R-modul semi-simplu, kerf este un sumand direct în $\bigoplus_{j\in J} M_j$, sumand care îl conţine pe $\bigoplus_{j\in J} \ker f_j$. Deci:

$$\ker f = N \oplus \left(\bigoplus_{j\in J} \ker f_j\right),$$

unde N este un sumand direct al lui $\bigoplus_{j\in J} M_j$. Dacă $N\neq 0$, atunci, pentru orice $j\in J$, $N\cap M_j$ este sau 0, sau M_j, ceea ce este imposibil - vezi [10, 9.4] sau [78, Lema 3.14, Corolar]. Rezultă că:

$$\ker f = \bigoplus_{l\in L} M_l$$

şi, conform primei teoreme de izomorfism,

$$\mathrm{Im} f \cong \bigoplus_{j\in J\setminus L} M_j. \ \square$$

Din (3.2.4.4) obţinem:

Corolarul 3.2.4.5: *Dacă $\{M_k\}_{k\in K}$ este o familie de R-module simple şi:*

$$M = \bigoplus_{k\in K} M_k,$$

atunci, pentru orice $f\in End(M)$, există o submulţime L a lui K astfel încât:

$$\ker f = \bigoplus_{k\in L} M_k \quad \text{şi} \quad \mathrm{Im} f \cong \bigoplus_{k\in K\setminus L} M_k. \ \square$$

Ca un caz particular al lui (3.2.4.5) avem:

Corolarul 3.2.4.6: *Dacă M este un R-modul simplu, atunci, pentru orice mulţime de indici I şi orice $f\in End(\oplus_I M)$, există o submulţime L a lui I astfel încât:*

$$\ker f = \oplus_L M \quad \text{şi} \quad \mathrm{Im} f \cong \oplus_{I\setminus L} M. \ \square$$

Aceste rezultate le putem generaliza astfel:

Teorema 3.2.4.7: *Fie $\{M_k\}_{k\in K}$ o familie de R-module idecompozabile, cu proprietatea că:*

$$M = \bigoplus_{k\in K} M_k$$

are P.I.S.D. şi, pentru orice $k\in K$, $End(M_k)$ este un inel regular. Atunci au loc următoarele afirmaţii:

1) *pentru orice $f\in End(M)$, există L şi L' - două submulţimi ale lui K astfel încât:*

$$\bigoplus_{k\in L} M_k \trianglelefteq \ker f \quad \text{şi} \quad \bigoplus_{k\in L'} M_k \trianglelefteq \mathrm{Im} f;$$

2) *pentru orice $i, j\in K$, $i\neq j$, avem*:

$Hom(M_i,M_j)=0$ sau M_i este izomorf cu un submodul al lui M_j.

Demonstraţie: Fie f un endomorfism al lui M. Dacă:

$\{ f_j^i : M_j \to N_i\}_{(i,j)\in I\times J}$

este familia dublu indexată de morfisme determinată de f, atunci, pentru orice i, $j\in K$, $\ker f_j^i$ este un sumand direct în M_j. Conform ipotezei, rezultă că, pentru orice i, $j\in K$,

$\ker f_j^i=0$,

caz în care:

$M_j\cong \mathrm{Im}\, f_j^i\subseteq M_i$,

sau:

$\ker f_j^i=M_j$,

caz în care:

$\mathrm{Im}\, f_j^i=0$.

Analog:

$M_i\cong \mathrm{Im}\, f_i^j\subseteq M_j$ sau $\mathrm{Im}\, f_i^j=0$.

Dacă, pentru orice $j\in J$,

$f_j : M_j \to \bigoplus_{k\in K} M_k$, $f_j=f\circ u_j$

are aceeaşi semnificaţie ca şi în secţiunea precedentă, atunci, conform relaţiei (72),

$\ker f_j=0$ sau $\ker f_j=M_j$

şi există L o submulţime a lui K astfel încât:

$\bigoplus_{k\in K}\ker f_k=\bigoplus_{k\in L} M_k\subseteq \ker f$ (vezi relaţia (71).

Pe de altă parte, din ipoteză şi relaţiile (75) şi (70) rezultă că, dacă $i\in K$ şi:

$f^i : M \to M_i$

are aceeaşi semnificaţie ca şi în secţiunea (3.2.3), atunci există şi o submulţime L' a lui K astfel încât:

$\bigoplus_{k\in K}\mathrm{Im} f^k=\bigoplus_{k\in L'} M_k\subseteq \mathrm{Im} f$.

Acum, demonstrăm că, pentru orice i, $j\in K$, $i\neq j$,

$Hom(M_i,M_j)=0$ dacă şi numai dacă $Hom(M_j,M_i)=0$.

Presupunem că:

$Hom(M_i,M_j)=0$

şi există:

$0\neq g : M_j \rightarrow M_i$.

Atunci g este un monomorfism şi, deoarece $End(M_i\oplus M_j)$ este regular, Img este un sumand direct în M_i; deci, conform ipotezei, există un morfism:

$h : M_i \rightarrow M_j$

astfel încât:

$h\circ g=1_{M_j}$,

ceea ce este o contradicţie cu presupunerea făcută. Rezultă că are loc (şi) afirmaţia de la punctul 2) al teoremei. □

Teorema precedentă are următoarele consecinţe:

Corolarul 3.2.4.8: *Fie $\{M_k\}_{k\in K}$ o familie de R-module idecompozabile şi*:

$$M=\bigoplus_{k\in K} M_k,$$

cu proprietatea că $M\oplus M$ are P.I.S.D.. Dacă, pentru orice $k\in K$, $End(M_k)$ este un inel local, atunci End(M) este un inel regular.

***Demonstraţie*:** Dacă $M\oplus M$ are P.I.S.D., atunci nucleul fiecărui endomorfism al lui M este un sumand direct în M. Dacă $f\in End(M)$, atunci, conform cu (3.2.4.7)1),

$$kerf=N\oplus(\bigoplus_{k\in L} M_k),$$

unde N este un sumand direct al lui M, iar L este o submulţime a lui K. Atunci, pentru orice $k\in K\backslash L$, $N\cap M_k$ este un sumand direct în M_k. Deoarece, pentru orice $k\in K\backslash L$, $N\cap M_k\neq M_k$. rezultă că, pentru orice $k\in K\backslash L$,

$N\cap M_k=0$.

Acum, din ipoteză, [10, 12.6 şi 12.3], rezultă că:

$N=0$.

Aşadar:

$$kerf=\bigoplus_{k\in L} M_k \quad \text{şi} \quad Imf\cong \bigoplus_{k\in K\backslash L} M_k. \ \square$$

Corolarul 3.2.4.9: *Dacă M este un R-modul idecompozabil astfel încât, pentru orice mulţime de indici I, R-modulul*:

$M^*=\oplus_I M$

are P.I.S.D. şi End(M) este un inel local, atunci End(M) este un inel regular.* □

Următorul concept va fi folosit în continuarea acestei secţiuni:

Definiţie: *O familie $\{M_k\}_{k\in K}$ de R-module se numeşte sistem rigid (de R-module) dacă, pentru orice $i, j\in K$, $i\neq j$,*

$Hom(M_i,M_j)=0$.

Acum, din (3.2.4.7) şi [42, §92] obţinem:

Corolarul 3.2.4.10: *Dacă*:

$$M=\bigoplus_{k\in K} M_k$$

este un R-modul cu P.I.S.D. şi, pentru orice $k\in K$, M_k este idecompozabil, fără-torsiune şi de rang finit, atunci $\{M_k\}_{k\in K}$ conţine un subsistem rigid sau perechi de R-module cvasi-izomorfe. (vezi Secţiunea 1.2.2) În particular, dacă, pentru orice $k\in K$, M_k este idecompozabil, fără-torsiune şi de rang unu, atunci $\{M_k\}_{k\in K}$ conţine un subsistem rigid sau perechi de R-module izomorfe. □

Pentru R-module injective obţinem următorul rezultat:

Propoziţia 3.2.4.11: *Fie $\{M_k\}_{k\in K}$ o familie de R-module injective idecompozabile, cu proprietatea că*:

$$M=\bigoplus_{k\in K} M_k$$

are P.I.S.D.. Atunci au loc următoarele afirmaţii:

1) *pentru orice f - endomorfism al lui M, kerf şi Imf sunt sumanzi direcţi în M, deci End(M) este un inel regular*;
2) *End(M) este un produs direct de inele regulare.*

Demonstraţie: Dacă $\{M_k\}_{k\in K}$ şi M sunt ca şi în enunţ, atunci, conform cu (3.1.2.1), pentru orice $i, j\in K$, $i\neq j$,

$$Hom(M_i,M_j)=0 \qquad \text{sau} \qquad M_i\cong M_j.$$

Deci, făcând un raţionament analog celui de la (3.2.4.7), obţinem că există o sub-mulţime L a lui K astfel încât:

$$Imf=\bigoplus_{k\in L} M_k$$

şi, astfel, kerf şi Imf sunt sumanzi direcţi în M şi End(M) este un inel regular. Conform cu (1.2.1.8), putem introduce pe K următoarea relaţie de echivalenţă, notată cu „≈": pentru orice $k_1, k_2\in K$, prin definiţie:

$$k_1\approx k_2 \qquad \text{dacă şi numai dacă} \qquad M_{k_1}\cong M_{k_2}.$$

Dacă, pentru un $k\in K$, notăm cu k^* clasa de echivalenţă a lui k, deci:

$$k^*=\{i\in K \mid M_k\cong M_i\},$$

atunci $\{k^*\}_{k\in K}$ este partiţia lui K, corespunzătoare relaţiei „≈", iar:

$$M=\bigoplus_{k^*\in K/\approx} M_{k^*},$$

unde:

$$M_{k^*}=\bigoplus_{i\in k^*} M_i.$$

Pe de altă parte, pentru orice $k_1, k_2 \in K$, care nu sunt echivalente, M_{k_1} şi M_{k_2} sunt total invariante în M. Atunci, conform cu (3.2.3.8),

$$End(M)= \prod_{k^* \in K/\approx} End(M_{k^*}),$$

iar din [78, 3.9] şi (3.2.4.9) rezultă că, pentru orice $k^* \in K/\approx$, End(M_{k^*}) este un inel regular. □

Rezultatele de la (3.2.4.11) le obţinem şi în următorul caz:

Teorema 3.2.4.12: *Fie*,

$$M=\bigoplus_{k\in K} M_k$$

un R-modul fără-torsiune astfel încât:

1) *pentru orice $k\in K$, End(M_k) este un domeniu cu ideale principale*,
2) *pentru orice $i, j\in K$, $i\neq j$*,

$$Hom(M_i,M_j)=0 \qquad sau \qquad M_i\cong M_j.$$

Atunci au loc următoarele afirmaţii:

a) *End(M) este un inel regular*;
b) *End(M) este un produs direct de inele regulare*;
c) *pentru orice $f\in End(M)$, există L şi L' - submulţimi ale lui K astfel încât*:

$$kerf=\bigoplus_{k\in L} M_k \qquad şi \qquad Imf\cong\bigoplus_{k\in L'} M_k.$$

***Demonstraţie*:** Dacă End(M_k) este un domeniu cu ideale principale, atunci M_k este idecompozabil, conform cu (1.2.5.1). Considerând pe K relaţia de echivalenţă „$\approx$”, amintită în demonstraţia de la (3.2.4.11), şi notând cu $\{k^*\}_{k\in K}$ partiţia lui K, corespunzătoare relaţiei „$\approx$”, obţinem, şi în acest caz că:

$$M= \bigoplus_{k^*\in K/\approx} M_{k^*},$$

unde:

$$M_{k^*}=\bigoplus_{i\in k^*} M_i$$

şi, pentru orice $k_1, k_2\in K$, care nu sunt echivalente, M_{k_1} şi M_{k_2} sunt total invariante în M. Din (1.2.5.2) rezultă că:

$$M_{k^*}=\bigoplus_{i\in k^*} M_i$$

are P.I.S.D. şi nucleul fiecărui endomorfism al lui M_{k^*} este o sumă directă de exemplare de M_i, $i\in k^*$. Deci, pentru orice $k^*\in K/\approx$, inelul End(M_{k^*}) este regular. Acum, pentru a obţine afirmaţia de la punctul b), putem aplica (3.2.3.8). Deoarece

M are P.I.S.D., conform cu (3.1.3.1), din (3.2.4.7) şi cele demonstrate mai sus, rezultă că, pentru orice $f \in End(M)$,

$$\ker f = N \oplus \left(\bigoplus_{k^* \in K/\approx} \ker f_{k^*}^{k^*} \right),$$

unde $f_{k^*}^{k^*} \in End(M_{k^*})$, iar N este un sumand direct în M. Dacă:

$$m = m_{k_1^*} + m_{k_2^*} + \ldots + + m_{k_r^*} \in N,$$

unde $r \in \mathbf{N}^*$ şi, pentru orice l=1, 2, …, r, $m_{k_l^*} \in M_{k_l^*}$, atunci:

$$0 = f(m) = f_{k_1^*}(m_{k_1^*}) + f_{k_2^*}(m_{k_2^*}) + \ldots + f_{k_2^*}(m_{k_2^*}).$$

Rezultă că, pentru orice l=1, 2, …, r, $m_{k_l^*} \in \ker f_{k_l^*}$, ceea ce este imposibil. Aşadar, are loc şi afirmaţia de la punctul c) al teoremei. □

Rezultatul de la (3.2.4.12) poate fi îmbunătăţit astfel:

Teorema 3.2.4.13: *Fie*,

$$M = \bigoplus_{k \in K} M_k$$

un R-modul astfel încât:

1) *pentru orice $k \in K$*,

   $E_k = End(M_k)$

   este un inel ereditar (drept),
2) *pentru orice $k \in K$, M_k este un R-modul idecompozabil, E_k-plat (stâng) şi auto-mic*,
3) *pentru orice $i, j \in K$, $i \neq j$*,

   $Hom(M_i, M_j) = 0$ *sau* $M_i \cong M_j$.

Atunci, pentru orice mulţime de indici I, au loc următoarele afirmaţii:

a) *R-modulul $\oplus_I M$ are P.I.S.D.*;
b) *$End(\oplus_I M)$ este un inel regular*;
c) *$End(\oplus_I M)$ este un produs direct de inele regulare*;
d) *pentru orice $f \in End(\oplus_I M)$, există L şi L′ - submulţimi ale lui K astfel încât*:

$$\ker f = \bigoplus_{k \in L} (\oplus_I M_k) \quad \text{şi} \quad Im f \cong \bigoplus_{k \in L'} (\oplus_I M_k).$$

***Demonstraţie*:** Dacă, pentru orice $k \in K$, M_k este un R-modul idecompozabil, E_k-plat (stâng), auto-mic şi inelul:

$$E_k = End(M_k)$$

este ereditar (drept), conform lui (1.2.4.13), pentru orice mulţime de indici I, $\oplus_I M_k$ are P.I.S.D.. Pe de altă parte, considerând (şi aici) pe K relaţia de echivalenţă „≉”,

amintită în demonstraţiile de la (3.2.4.11) şi (3.2.4.12), şi notând cu $\{k^*\}_{k\in K}$ partiţia lui K, corespunzătoare relaţiei „≈”, obţinem, şi în acest caz că:

$$M=\bigoplus_{k^*\in K/\approx} M_{k^*},$$

unde:

$$M_{k^*}=\bigoplus_{i\in k^*} M_i$$

şi, pentru orice $k_1, k_2\in K$, care nu sunt echivalente, M_{k_1} şi M_{k_2} sunt total invariante în M. Iarăşi, din (1.2.4.13) şi (3.2.3.6), rezultă că, pentru orice $k^*\in K/\approx$,

$$M_{k^*}=\bigoplus_{i\in k^*} M_i$$

are P.I.S.D., nucleul fiecărui endomorfism al lui M_{k^*} este un sumand direct (în M_{k^*}) şi End(M_{k^*}) este un inel regular. Rezultă că, pentru orice mulţime de indici I,

$$\oplus_I M=\oplus_I\Big(\bigoplus_{k^*\in K/\approx} M_{k^*}\Big)=\bigoplus_{k^*\in K/\approx}(\oplus_I M_{k^*}),$$

unde, pentru orice $k^*\in K/\approx$, $\oplus_I M_{k^*}$ este un submodul cu P.I.S.D. (al lui $\oplus_I M$), total invariant în $\oplus_I M$, şi End($\oplus_I M_{k^*}$) este un inel regular. În continuare judecăm ca şi la demonstraţia lui (3.2.4.12), dar înlocuind pe M_{k^*} cu $\oplus_I M_{k^*}$. □

3.3. SUBMODULE ŞI MODULE FACTOR ALE MODULELOR CU P.I.S.D.

În acest subcapitol vom generaliza rezultatele obţinute în Subcapitolul 2.3, la module cu P.I.S.D., module considerate peste diferite inele asociative, comutative, cu unitate.

Din (1.2.1.1) şi (1.1.1) rezultă că dacă un R-modul M are proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi, atunci orice sumand direct N, al lui M, şi M/N au această proprietate. În acest subcapitol vom studia condiţiile necesare şi/sau suficiente pentru ca anumite submodule ale R-modulului M, cu P.I.S.D., care nu sunt, neapărat, sumanzi direcţi, şi modulele factor corespunzătoare, să aibă P.I.S.D.. Astfel, fiind dat un R-modul M, cu P.I.S.D., sunt investigate, aici, ca şi în Subcapitolul 2.3, submodulele de tipul:

- *rM*,
- *M[r]*,
- $r^{-1}M$ (în acest caz, M este un submodul al unui R-modul K, iar r este un element oarecare al inelului R - inel asociativ, comutativ, cu unitate),

- *F(M)* - submodulul Frattini al lui M

şi

- N_M - submodulul p-bazic al lui M, pentru un p - element prim (oarecare) al lui R,

precum şi R-modulele factor corespunzătoare.

Peste tot în acest subcapitol vom nota cu R un inel asociativ, comutativ, cu unitate, R-modulele considerate vor fi peste astfel de inele şi vom nota cu P mulţimea tuturor elementelor prime neasociate din R. Alte condiţii asupra inelului R sau modulului M se vor pune ori de câte ori va fi cazul.

3.3.1. Submodule de forma rM, r∈R

Reamintim că dacă r∈R, atunci:

$$rM=\{r\cdot m \mid m\in M\}$$

este un submodul al lui M.

Începem investigaţiile noastre cu următorul rezultat elementar:

Observaţia 3.3.1.1: *Dacă M este un R-modul semi-simplu (cu P.I.S.D.), atunci orice submodul N, al lui M, şi M/N au P.I.S.D.. În particular, pentru orice r∈R, rM şi M/rM au P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Conform cu [70, 6.6.8], orice submodul N al unui R-modul semi-simplu M, este un sumand direct în M, deci N şi M/N au P.I.S.D.. □

În continuare vom prezenta condiţii necesare şi/sau suficiente pentru ca submodulul rM, r∈R, să aibă P.I.S.D., dacă M are această proprietate.

Propoziţia 3.3.1.2.: *Fie M un R-modul oarecare şi r∈R. Atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Dacă N este un sumand direct în M, atunci rN este un sumand direct în rM. Dacă*:

   $$M[r]=0$$

   (vezi Secţiunea 3.3.2), atunci are loc şi reciproca, adică: dacă rN este un sumand direct în rM, atunci N este un sumand direct în M.

2) *Dacă H este un submodul în rM, atunci există N - submodul în M astfel încât*:

   $$H=rN.$$

3) *Dacă*:

   $$M[r]=0,$$

   atunci oricare ar fi T şi S - submodule ale lui M,

   $$mT\cap mS=m(T\cap S).$$

***Demonstraţie*: 1)** Dacă N este un sumand direct în M, atunci:

$M=N\oplus K$,

unde K este un submodul al lui M. Deci, oricare ar fi $m\in M$, există, în mod unic, un $n\in N$ şi un $k\in K$ astfel încât:

$m=n+k$.

Rezultă că:

$rm=rn+rk$

şi, deci, $rM\subseteq rN+rK$. Deoarece $rN+rK\subseteq rM$, rezultă că:

$rM=rN+rK$.

Cum,

$rN\cap rK\subseteq N\cap K=0$,

rezultă că:

$rM=rN\oplus rK$.

Reciproc, fie:

$rM=rN\oplus rK$.

Atunci, oricare ar fi $m\in M$, există, în mod unic, un $n\in N$ şi un $k\in K$ astfel încât:

$r\cdot m=r\cdot n+r\cdot k$.

Deci,

$r\cdot(m-n-k)=0$.

Deoarece,

$M[r]=0$,

rezultă că:

$m=n+k$.

Dacă $x\in N\cap K$, atunci:

$r\cdot x\in rN\cap rK=0$

şi, deci,

$x=0$.

Rezultă că:

$M=N\oplus K$.

2) Fie H un submodul oarecare al lui rM şi:

$N=\{m\in M \mid r\cdot m\in H\}$.

Atunci:

$H=rN$.

3) Fie T şi S două submodule ale lui M şi $x\in rT\cap rS$. Atunci:

$x=r\cdot t=r\cdot s$,

cu $t \in T$ şi $s \in S$. Rezultă că:

$r \cdot (t-s)=0$.

Deoarece,

$M[r]=0$,

obţinem că:

$t=s$;

deci, $x \in r(T \cap S)$. Aşadar $rT \cap rS \subseteq r(T \cap S)$ şi, deoarece $r(T \cap S) \subseteq rT \cap rS$, obţinem egalitatea din enunţ. □

Începem rezolvarea problemei noastre:

Teorema 3.3.1.3: *Fie M un R-modul, cu*:

$M[r]=0$,

unde $r \in R$*, Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *M are P.I.S.D.*;
2) *rM are P.I.S.D.*.

***Demonstraţie*:** Presupunem că M are P.I.S.D.. Fie T şi S doi sumanzi direcţi în rM. Conform cu (3.3.1.2.), există N şi K - sumanzi direcţi în M astfel încât:

$T=rN$ şi $S=rK$.

Tot din (3.3.1.2) rezultă că:

$T \cap S=rN \cap rK=r(N \cap K)$

este un sumand direct în rM. Deci rM are P.I.S.D..

Reciproc, presupunem că rM are P.I.S.D. şi fie N şi K doi sumanzi direcţi în M. Atunci rN, rK şi:

$r(N \cap K)=rN \cap rK$

sunt sumanzi direcţi în rM (vezi (3.3.1.2)1),3)). Acum (3.3.1.2)1) completează demonstraţia. □

Şi aici se impune o observaţie:

Observaţia 3.3.1.4: *În enunţul Teoremei 3.3.1.3, condiţia*:

$M[r]=0$

este absolut necesară; dacă aceasta ar lipsi, atunci echivalenţa celor două afirmaţii (din enunţul lui (3.3.1.3)) s-ar putea să nu mai aibă loc.

***Demonstraţie*:** Vom arăta dacă R este un domeniu cu ideale principale şi p este un element prim din R, atunci există R-module M cu proprietatea că $M[p]\neq 0$, pM are P.I.S.D. şi M nu are P.I.S.D.. Într-adevăr, fie:

$M \cong R/(p) \oplus R/(p^2)$.

Conform cu (1.2.3.9), acest R-modul nu are P.I.S.D., dar pM are această proprietate (se observă că $M[p]\neq 0$). □

Din (3.3.1.3) rezultă:

Corolarul 3.3.1.5: *Fie M un R-modul fără-torsiune. Atunci*:

M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă, pentru orice $r\in R$, rM are P.I.S.D..

Demonstraţie**:** Vezi demonstraţia de la (2.3.1.5). □

Corolarul 3.3.1.6: *Fie R un domeniu cu ideale principale şi M un R-modul fără-torsiune. Atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Dacă M este liber (sau liber numărabil sau liber de puterea continuului), atunci pentru orice $r\in R$, rM are P.I.S.D.*;

2) *Dacă M nu este redus, atunci*:

M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă, pentru orice $r\in R$, rH are această proprietate,

unde H este partea redusă a lui M.

Demonstraţie**: 1)** Dacă R-modulul M este ca şi în enunţ, atunci M are P.I.S.D. (vezi [58, p. 49]). Deci putem aplica (3.3.1.3).

2) Fie:

$M=D\oplus H$,

cu D - divizibil şi H - redus. Conform cu (1.2.5.4),

M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă H are această proprietate.

Aplicăm, iarăşi, (3.3.1.3). □

Corolarul 3.3.1.7: *Fie R un domeniu cu ideale principale şi M un p-R-modul. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *M are P.I.S.D.*;

2) *Pentru orice $r\in R$, rM are P.I.S.D.*.

Demonstraţie**: 1)** implică **2)** Presupunem că M este un p-R-modul cu P.I.S.D. şi fie r un element oarecare din R. Conform cu (1.2.2.5) şi (1.2.3.3), distingem două cazuri:

Cazul 1: Există un $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât:

$M\cong R/(p^n)$.

Dacă,

$r=p^i\cdot q$, cu $i\geq 1$ şi $(p,q)=1$,

atunci:

($rM\cong R/(p^{n-i})$, pentru $i\leq n-1$) şi ($rM=0$, pentru $i\geq n$).

Rezultă că, în acest caz, rM este idecompozabil şi, deci, rM are P.I.S.D.. Dacă nu există $i\geq 1$ astfel încât p^i să dividă pe r, atunci:

$M[r]=0$

şi (3.3.1.3) completează demonstraţia.

Cazul 2: $M=N_p\oplus D_p$,

cu:

$pN_p=0$, $D_p=0$ sau D_p este divizibil.

Dacă p^i divide pe r, unde $i\geq 1$, atunci:

$rM=D_p$

are P.I.S.D., conform cu (1.2.1.1). Dacă, pentru orice $i\geq 1$, p^i nu divide pe r, atunci:

$M[r]=N_p[r]\oplus D_p[r]=0$

(vezi (3.3.2.1)1). Iarăşi (3.3.1.3) completează demonstraţia.

2) implică **1)** Dacă are loc afirmaţia de la punctul 2), atunci considerând pe:

$r=1$,

obţinem că M are P.I.S.D.. □

Corolarul 3.3.1.8: *Fie R un domeniu cu ideale principale şi M un R-modul de torsiune. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *M are P.I.S.D.*;

2) *Pentru orice $r\in R$, rM are P.I.S.D.*.

Demonstraţie**:** Ca şi la (3.3.1.7), este suficient să demonstrăm că „***1)*** *implică* ***2)***”. Fie M un R-modul M, de torsiune, cu P.I.S.D.. Atunci:

$$M=(\bigoplus_{p\in P_0} M_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_1} N_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_1} D_p), \quad (59)$$

unde:

- $P_0\subseteq P$ şi, pentru orice $p\in P_0$, M_p este un p-R-modul idecompozabil şi neelementar;
- $P_1\subseteq P$,

  $P_0\cap P_1=\varnothing$

  şi, pentru orice $p\in P_1$, N_p este elementar,

  $D_p=0$ sau D_p este divizibil.

Rezultă că:

$$rM=(\bigoplus_{p\in P_0} rM_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_1} rN_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_1} rD_p),$$

conform cu (3.3.1.2.)1). Conform cu (3.3.1.7), fiecare sumand direct din descompunerea lui rM, de mai sus, are P.I.S.D. şi este total invariant în rM (vezi [41, §8]). Acum (1.2.1.1) completează demonstraţia. □

Iarăşi se impune o observaţie:

Observaţia 3.3.1.9: *În (3.3.1.7) şi (3.3.1.8) cuantificatorul universal „ $\forall$”, joacă un rol fundamental: dacă acesta ar lipsi, implicaţia „**2)** implică **1)**” s-ar putea să nu (mai) aibă loc.*

Demonstraţie**:** Contraexemplu: dacă p este un element prim în R şi:

$M\cong R/(p^2)\oplus R/(p^2)$,

atunci:

$$pM \cong R/(p) \oplus R/(p)$$

are P.I.S.D., iar M nu are această proprietate. □

Conform cu (1.2.2.5), dacă R este un domeniu cu ideale principale, un R–modul mixt, neredus, cu P.I.S.D. este de forma:

$$M=(\bigoplus_{p\in P_1} M_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_2} N_p)\oplus D\oplus U \qquad (60)$$

unde:

- P_1 şi P_2 sunt submulţimi ale mulţimii P a tuturor elementelor prime neasociate din R, şi:

  $$P_1\cap P_2=\emptyset;$$
- pentru orice $p\in P_1$, M_p este redus, idecompozabil şi neelementar;
- pentru orice $p\in P_2$, N_p este elementar;
- D este divizibil, fără-torsiune,

şi:

- U este omogen, complet decompozabil, de rang finit.

Deoarece $D\oplus U$ este total invariant în M, rezultă din (1.1.1) şi (1.2.1.1) că orice R-modul de forma (60) are P.I.S.D.. Combinând aceste rezultate cu cele obţinute la (3.3.1.3) şi (3.3.1.8) obţinem:

Corolarul 3.3.1.10: *Dacă R este un domeniu cu ideale principale şi R-modulul M este descompus conform relaţiei (60), atunci*:

M are P.I.S.D., dacă şi numai dacă, pentru orice $r\in R$, rU are P.I.S.D.. □

Fie R un domeniu cu ideale principale şi:

$$M/rM=\bigoplus_{p\mid r}(M/rM)_p$$

descompunerea directă a lui M/rM în p-componentele sale, conform cu [70, 6.11.3]. Din (1.2.1.1) rezultă că:

M/rM are P.I.S.D. dacă şi numai dacă, pentru orice p | r, $(M/rM)_p$ este un p-R-modul cu P.I.S.D..

Astfel avem următoarea teoremă:

Teorema 3.3.1.11: *Fie R un domeniu cu ideale principale, M un R-modul cu P.I.S.D. şi $r\in R$ un element oarecare. În oricare din următoarele cazuri, M/rM are P.I.S.D.*:

1) *M este un p-R-modul*;
2) *$M=\bigoplus_{p\in P} M_p$ este un R-modul de torsiune, descompus conform lui [70, 6.11.3] şi*:

$$\bigoplus_{p\mid r} rM_p=0;$$

3) *$M\cong R$*;

4) *M este divizibil*;

5) *r este un element prim al lui R*.

***Demonstraţie*:** **1)** Fie M un p-R-modul cu P.I.S.D.. Dacă există un $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$M\cong R/(p^n),$$

şi p^i divide pe r, cu $i\geq 1$, atunci, din (3.3.1.5) rezultă că:

$$M/rM\cong R/(p^n)/p^i(R/(p^n))\cong R/(p^i).$$

Dacă p^i nu divide pe r, pentru nici un $i\geq 1$, atunci, tot din (3.3.1.5), rezultă că:

$$M/rM\cong M.$$

Deci, în acest caz, M/rM are P.I.S.D.. Presupunem, acum, că:

$$M=N_p\oplus D_p,$$

unde:

- N_p este elementar,
- $D_p=0$ sau D_p este divizibil.

Atunci:

$$rM=C_p,$$

dacă p^i divide pe r, cu $i\geq 1$, sau:

$$rM=M,$$

dacă p^i nu divide pe r, pentru nici un $i\geq 1$. Rezultă că, şi acum, M/rM are P.I.S.D..

2) Fie:

$$M=\bigoplus_{p\in P} M_p$$

un R–modul de torsiune cu P.I.S.D.. Conform ipotezei şi lui (3.3.1.2)1),

$$rM=\bigoplus_{p\in P_0} rM_p=\bigoplus_{p\in P_0} M_p,$$

unde:

$$P_0=\{p\in P \mid p \text{ nu divide } r\};$$

deci M/rM are P.I.S.D..

3) Fie:

$$r=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$$

descompunerea lui r în produs de puteri de elemente prime neasociate ($p_i\in P$, $n_i\in\mathbf{N}^*$, pentru orice $i=1, 2, \ldots, k$, $k\in\mathbf{N}^*$) şi:

$$M\cong R.$$

Atunci:

$$M/rM\cong R/rR\cong R/(r)$$
$$\cong R/(p_1^{n_1})\oplus R/(p_2^{n_2})\oplus\ldots\oplus R/(p_k^{n_k}),$$

şi are P.I.S.D., conform lui (1.2.3.9).

4) Dacă M este divizibil, atunci:

$rM=M$ şi $M/rM\cong 0$.

5) Dacă:

$r=p$

este un element prim din R, atunci:

$M/rM=M/pM$

este un p-R-modul elementar, şi, acum, (3.3.1.1) completează demonstraţia. □

3.3.2. Submodule de forma M[r], r∈R

Reamintim că dacă M este un R-modul oarecare şi $r\in R$, atunci:

$M[r]=\{m\in M \mid r\cdot m=0\}$

este un submodul al lui M. Desigur că dacă r este inversabil, atunci:

$M[r]=0$,

iar dacă $r\in An(M)$, atunci:

$M[r]=M$.

De aceea, în aceste două cazuri triviale M[r] şi M/M[r] au, fiecare, P.I.S.D., dacă M are această proprietate. În continuarea acestei secţiuni, vom considera r un element neinversabil din R şi $r\notin An(M)$.

Propoziţia 3.3.2.1: *Fie M un R-modul şi $r\in R^*$. Atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Dacă N este un sumand direct în M, atunci N[r] este un sumand direct în M[r]*;
2) *Dacă T şi S sunt submodule ale lui M, atunci*:
   $T[r]\cap S[r]=(T\cap S)[r]$;
3) *Dacă în M orice submodul pur este sumand direct (în M), şi H este un sumand direct în M[r], atunci există N - sumand direct în M astfel încât*:
   $N[r]=H$.

***Demonstraţie*: 1)** Fie:

$M=N\oplus K$

o descompunere directă (oarecare) a lui M. Vom arăta că:

$$M[r]=N[r]\oplus K[r]. \qquad (*)$$

Dacă $m\in M[r]$, atunci există un $n\in N$ şi există un $k\in K$ astfel încât:

$m=n+k$ şi $r\cdot m=r\cdot n+r\cdot k=0$.

Deoarece,

$N\cap K=0$,

rezultă că:

$r\cdot n=r\cdot(-k)=-r\cdot k=0$;

adică $n \in N[r]$ şi $k \in K[r]$. Deci $M[r] \subseteq N[r] \oplus K[r]$, căci,

$$N[r] \cap K[r] \subseteq N \cap K = 0.$$

Cum:

$$N[r]+K[r]=N[r] \oplus K[r] \subseteq M[r],$$

obţinem egalitatea (∗).

2) Fie $x \in T[r] \cap S[r]$. Atunci $x \in T$, cu:

$$r \cdot x=0,$$

şi $x \in S$, cu:

$$r \cdot x=0.$$

Rezultă că $x \in (T \cap S)[r]$ şi, deci, $T[r] \cap S[r] \subseteq (T \cap S)[r]$. Deoarece $(T \cap S)[r] \subseteq T[r] \cap S[r]$, rezultă că are loc egalitatea din enunţ.

3) Conform alegerii lui r, rezultă că $rM \neq 0$. Dacă M[r] este esenţial în M, atunci, oricare ar fi N un submodul al lui M,

$$N[r]=N \cap M[r].$$

Dacă M[r] nu este esenţial în M, atunci există un $m \in M$ cu proprietatea că:

$$\langle m \rangle [r]=0,$$

şi fie:

$$N=\langle H,m \rangle,$$

unde H este un summand direct în M[r]. Vom arăta că:

$$N[r]=H.$$

Dacă $n \in N$, atunci:

$$n=h+s \cdot m,$$

cu $h \in H$ şi $s \in R$, $s \notin An(m)$. Egalitatea:

$$r \cdot n=0$$

implică:

$$r \cdot (s \cdot m)=0;$$

deci:

$$m=0 \quad \text{şi} \quad N[r]=H.$$

Dacă N[r] este un sumand direct în M[r], atunci, din [41, 29.1], rezultă că N este un submodul pur în M. Rezultă, conform ipotezei, că N este un sumand direct în M. □

O consecinţă imediată a lui (3.3.2.1) este:

Corolarul 3.3.2.2: *Dacă M este un R-modul divizibil cu P.I.S.D., atunci, pentru orice $r \in R$, M[r] are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** În R-modulele divizibile submodulele pure coincid cu sumanzii direcţi ai acestora; deci, putem aplica (3.3.2.1). □

Din (3.3.2.1)1) rezultă că problema determinării R-modulelor M cu P.I.S.D., pentru care M[r] are aceeaşi proprietate, se reduce la acele R-module în care $M[r]\neq 0$; deci cazul R-modulelor fără-torsiune devine trivial.

Teorema 3.3.2.3: *Fie R un domeniu cu ideale principale şi M un R-modul de torsiune. Dacă M are P.I.S.D., atunci, pentru orice $r\in R$, M[r] are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Fie M un R-modul de torsiune cu P.I.S.D. şi:

$$M=\bigoplus_{p\in P} M_p$$

descompunerea directă a lui M în p-submodulele sale. Atunci:

$$M[r]=\bigoplus_{p\in P} M_p[r],$$

conform cu (3.3.2.1)1). Vom arăta, mai întâi, că, pentru orice p - element prim din R, $M_p[r]$ are P.I.S.D.. Deoarece M_p este un p-R-modul cu P.I.S.D., distingem două cazuri:

Cazul 1: M_p este redus, idecompozabil, nelementar. În acest caz există un $n\in \mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$M\cong R/(p^n)$$

şi, pentru orice $r\in R$, $M_p[r]$ are P.I.S.D. - vezi (3.3.1.5).

Cazul 2: R-modulul M_p este de forma:

$$M_p=N_p\oplus D_p,$$

unde:

$$pN_p=0,$$

iar:

$$D_p=0 \qquad \text{sau} \qquad D_p \text{ este divizibil.}$$

În acest caz, oricare ar fi K un submodul pur în M_p,

$$pK=K\cap pM_p=K\cap pD_p=0 \qquad \text{sau} \qquad pK=D_p.$$

În ambele subcazuri K este un sumand direct în M_p, conform cu [41, 27.5], respectiv [41, p. 38]. Fie acum T şi S doi sumanzi direcţi în $M_p[r]$. Conform cu (3.3.2.1)3), există U şi V - sumanzi direcţi în M_p astfel încât:

$$U[r]=T \qquad \text{şi} \qquad V[r]=S.$$

Deoarece M_p are P.I.S.D., rezultă că $U\cap V$ este un sumand direct în M_p. Din (3.3.2.1)1) şi (3.3.2.1)2) rezultă că:

$$(U\cap V)[r]=U[r]\cap V[r]=T\cap S$$

este un sumand direct în $M_p[r]$. Deci $M_p[r]$ are P.I.S.D.. Deoarece submodulele $M_p[r]$, $p\in P$, sunt total invariante în M[r], (1.2.1.1) completează demonstraţia. □

Din (3.3.2.3) obţinem:

Corolarul 3.3.2.4: *Dacă R este un domeniu cu ideale principale şi M este un R-modul mixt, neredus, cu P.I.S.D., atunci, pentru orice $r\in R$, M[r] are P.I.S.D..*

Demonstraţie: Dacă inelul R şi R-modulul M sunt ca şi în enunţ, atunci:

$$M[r]=\bigoplus_{p\in P} M_p[r],$$

conform relaţiei (60) din secţiunea (3.3.1). Acum (3.3.2.3) completează demonstraţia. □

Remarcăm următorul fapt:

Observaţia 3.3.2.5: *Reciproca lui (3.3.2.3) nu este, în general, adevărată, adică: există R-module M şi există $r\in R$, cu proprietatea că M[r] are P.I.S.D., iar M nu are această proprietate.*

Demonstraţie: Contraexemplu, fie R un domeniu cu ideale principale, p un element prim din R şi:

$$M\cong R/(p^2)\oplus R/(p^2).$$

Atunci:

$$M[p]\cong R/(p)\oplus R/(p).$$

Conform cu (1.2.3.9), M[p] are P.I.S.D., iar M nu are P.I.S.D.. □

În încheierea acestei secţiuni prezentăm următorul rezultat, referitor la R-modulul cât M/M[r]:

Propoziţia 3.3.2.6: *Fie M un R-modul. Atunci, oricare ar fi $r\in R$, R-modulul M/M[r] are P.I.S.D. dacă şi numai dacă rM are această proprietate.*

Demonstraţie: Fie $r\in R$ şi:

$$\rho_r : M \to M$$

înmulţirea cu r în M. Atunci nucleul $\ker\rho_r$, al lui ρ_r, este M[r], iar imaginea $\mathrm{Im}\rho_r$ este rM. Rezultă că şirul:

$$0 \to M[r] \to M \xrightarrow{\rho_r} rM \to 0$$

este exact, şi, deci,

$$M/M[r]\cong rM.$$ □

3.3.3. Submodule de forma $r^{-1}M$, $r\in R$

Fie K un R-modul oarecare, M un submodul al lui K şi $r\in R$. Se ştie că:

$$r^{-1}M=\{k\in K \mid r\cdot k\in M\}$$

este un submodul al lui K. În această secţiune vom vedea în ce condiţii $r^{-1}M$ are P.I.S.D., dacă M are această proprietate, în cazul în care r este neinversabil. În acest sens, pentru început, avem:

Propoziţia 3.3.3.1: *Dacă M este un submodul al lui K şi r este un element neinversabil al lui R, atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Oricare ar fi N şi H două submodule ale lui K,*

$$r^{-1}N\cap r^{-1}H=r^{-1}(N\cap H);$$

2) *Dacă,*

$M[r]=0$

şi T este un submodul în $r^{-1}M$*, atunci există S - submodul în K astfel încât*:

$T=r^{-1}S$;

3) *M este r-divizibil dacă şi numai dacă*:

$r^{-1}M=M$;

4) *Dacă,*

$K[r]=0$

şi M este un submodul al lui rK, atunci următoarele egalităţi sunt echivalente:

a) $M=N\oplus H$,

b) $r^{-1}M=r^{-1}N\oplus r^{-1}H$.

***Demonstraţie*: 1)** Fie $x\in r^{-1}N\cap r^{-1}H$. Atunci $r\cdot x\in N$ şi $r\cdot x\in H$; deci $r\cdot x\in N\cap H$, adică $x\in r^{-1}(N\cap H)$. Rezultă că $r^{-1}N\cap r^{-1}H\subseteq r^{-1}(N\cap H)$. (∗). Dacă $y\in r^{-1}(N\cap H)$, atunci $r\cdot y\in N\cap H$; deci $r\cdot y\in N$ şi $r\cdot y\in H$, adică $y\in r^{-1}N\cap r^{-1}H$. Aşadar $r^{-1}(N\cap H)\subseteq r^{-1}N\cap r^{-1}H$. (∗∗) Din relaţiile (∗) şi (∗∗) obţinem egalitatea din enunţ.

2) Fie:

$S=\{r\cdot t \mid t\in T\}=rT$.

Atunci, conform ipotezei şi lui [41, p. 6],

$r^{-1}S=r^{-1}(rT)=T+M[r]=T$.

3) Presupunem că M este r-divizibil şi fie $x\in r^{-1}M$. Atunci există un $m\in M$ astfel încât:

$r\cdot x=m$.

Conform ipotezei, $x\in M$. Rezultă că $r^{-1}M\subseteq M$ şi cum $M\subseteq r^{-1}M$, obţinem egalitatea din enunţ.

Reciproc, presupunem că are loc egalitatea:

$M=r^{-1}M$

şi considerăm ecuaţia:

$r\cdot x=m\in M$.

Atunci:

$x\in r^{-1}M=M$

şi, deci, M este r-divizibil.

4) Fie K şi M ca şi în enunţ. Presupunem că:

$M=N\oplus H$.

Conform cu (3.3.1.2)2), există M_1, N_1, H_1 - submodule ale lui K astfel încât:

$M=rM_1$, $N=rN_1$ şi $H=rH_1$.

Conform ipotezei, avem că:

$rM_1=rN_1\oplus rH_1$,

iar din (3.3.1.2)1) rezultă că:

$M_1=N_1\oplus H_1$.

Atunci:

$r^{-1}M=r^{-1}(rM_1)=M_1+K[r]=M_1=N_1\oplus H_1=(N_1+K[r])\oplus(H_1+K[r])$
$=r^{-1}(rN_1)\oplus r^{-1}(rH_1)=r^{-1}N\oplus r^{-1}H$.

Reciproc, presupunem că:

$r^{-1}M=r^{-1}N\oplus r^{-1}H$.

Atunci:

$r(r^{-1}M)=r(r^{-1}N)\oplus r(r^{-1}H)$.

Deci:

$M\cap rK=(N\cap rK)\oplus(H\cap rK)$

şi, conform ipotezei, obţinem că:

$M=N\oplus H$. □

Principalul rezultat al acestei secţiuni este:

Teorema 3.3.3.2: *Fie K un R-modul cu*:

$K[r]=0$,

pentru un $r\in R$ *- element neinversabil. Atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Dacă M este un submodul al lui rK, atunci:*
M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă $r^{-1}M$ *are P.I.S.D.*;

2) *Dacă M este un submodul pur în K, atunci*:

$M=r^{-1}M$

şi:

$M=N\oplus H$ *dacă şi numai dacă* $r^{-1}M=r^{-1}N\oplus r^{-1}H$.

***Demonstraţie*:** **1)** Presupunem că M are P.I.S.D. şi fie T şi S doi sumanzi direcţi în $r^{-1}M$. Conform lui (3.3.3.1)2) şi lui (3.3.3.1)4), există U şi V - sumanzi direcţi în M astfel încât:

$T=r^{-1}U$ şi $S=r^{-1}V$.

Atunci:

$T\cap S=r^{-1}U\cap r^{-1}V=r^{-1}(U\cap V)$

este un sumand direct în $r^{-1}M$ şi, deci, $r^{-1}M$ are P.I.S.D..

Reciproc, presupunem că $r^{-1}M$ are P.I.S.D. şi fie N şi H doi sumanzi direcţi în M. Atunci $r^{-1}N$, $r^{-1}H$ şi:

$r^{-1}N\cap r^{-1}H=r^{-1}(N\cap H)$

sunt sumanzi direcţi în $r^{-1}M$. Conform lui (3.3.3.1)4), $N\cap H$ este sumand direct în M şi, deci, M are P.I.S.D..

2) Deoarece:

$r^{-1}(rM)=M+K[r]=M$ şi $rM=M\cap rK$,

din (3.3.3.1)1) obţinem:

$$M=M+K[r]=r^{-1}(rM)=r^{-1}(rK\cap M)=[r^{-1}(rK)]\cap(r^{-1}M)=(K+rK)\cap(r^{-1}M)$$
$$=K\cap(r^{-1}M)=r^{-1}M.$$

Acum ultima afirmaţie din enunţ devine imediată, căci dacă N este un sumand direct în M, atunci N este un submodul pur şi în M, şi în K (vezi [41, 26.1(a)]). □

Din (3.3.3.2) obţinem:

Corolarul 3.3.3.3: ***1)*** *În condiţiile de la (3.3.3.2)2), submodulul M are P.I.S.D. exact dacă* $r^{-1}M$ *are această proprietate.*

2) *Dacă, K este un R–modul fără-torsiune şi M este un submodul pur al lui K (în particular M este un sumand direct în K), atunci*:

M are P.I.S.D. dacă şi numai dacă $r^{-1}M$ *are P.I.S.D..* □

Şi aici se impune o observaţie:

Observaţia 3.3.3.4: *În (3.3.3.2)2), şi implicit (3.3.3.3)1), condiţiile ca*,

$K[r]=0$,

sau M - submodul în K cu proprietatea că:

$rM=rK\cap M$,

sunt fundamentale. Astfel, dacă una din aceste condiţii nu sunt îndeplinite, atunci concluzia de la (3.3.3.3)1) poate să nu aibă loc.

***Demonstraţie*:** Contraexemple: **1)** Dacă R este un domeniu cu ideale principale şi $p\in P$,

$K\cong R/(p^2)\oplus R/(p)$ şi $M=R/(p)$

- este submodul pur în G, atunci:

$p^{-1}M\cong K$

şi $K[p]\neq 0$. Se observă că M are P.I.S.D., dar $p^{-1}M$ nu mai are această proprietate.

2) Dacă R este un domeniu cu ideale principale şi $p, q\in P$,

$K\cong R/(p^3)\oplus R/(p^3)\oplus R/(q)$ şi $M\cong R/(p)$,

atunci:

$pM=0$,

iar $pK\cap M\neq 0$. În acest caz submodulul M are P.I.S.D., iar submodulul:

$p^{-1}M\cong R/(p^2)\oplus R/(p^2)$

nu are P.I.S.D.. □

3.3.4. Submodulul lui Frattini

Fie R un domeniu de ideale principale. În această secţiune vom studia condiţiile în care submodulul Frattini al unui R-modul M, cu P.I.S.D., şi R-modulul factor M/F(M), au şi ele această proprietate. Reamintim că un submodul nenul N, al lui M, se numeşte *maximal* (în M) dacă:

$(N<M$ şi $N\leq H<M)$, implică $N=H$;
iar submodulul Frattini al lui M, notat cu F(M), este intersecţia tuturor submodulelor maximale ale lui M.

Pentru început prezentăm următoarele rezultate elementare exprimate în:

Propoziţia 3.3.4.1: *Dacă M este un R-modul şi N este un submodul al lui M, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *N este maximal în M*;

2) ***a)*** *M/N este un R-modul ciclic*,

b) *există p - un element prim în R astfel încât $pM\subseteq N$*,

c) *există P - un ideal prim al lui R astfel încât*:

$An(M/N)=P$ *şi* $M/N\cong R/P$;

3) *M/N este un R-modul simplu*.

***Demonstraţie*:** **1)** implică **2)** Presupunem că N este un submodul maximal în M. Dacă M/N nu este ciclic, atunci există un generator x+N al lui M/N astfel încât $<x,N>\neq M$ - ceea ce contrazice maximalitatea lui N. Deci:

$M/N=<x+N>=\{r\cdot x+N \mid r\in R\}$.

Dacă M/N nu este de torsiune, atunci există un $r\in R$ astfel încât $rM\not\subset N$; deci există un $y\in M\setminus N$ astfel încât $<y,N>\neq M$, ceea ce, iarăşi, contrazice maximalitatea lui N în M. Rezultă că M/N este de torsiune. Deci există un $s\in R$ astfel încât $s\cdot x\in N$. Dacă s nu este prim, atunci există un divizor q al lui s, q neasociat cu s, astfel încât $q\cdot x\notin N$, adică N nu este maximal în M. Rezultă că:

$s=p$

- element prim în R şi $pN\subseteq M$. Dacă:

$P=(p)$

este idealul (principal) lui R, generat de p, atunci, din cele demonstrate mai sus, rezultă că:

$An(M/N)=P$.

Acum [52, Propoziţia 5.2, p.107] şi [10, 3.9] arată că:

$M/N\cong R/P$.

2) implică **3)** Acum presupunem că:

$M/N=<x+N>$

şi că M/N nu este simplu. Atunci M/N are un submodul propriu $H/N<M/N$, unde $N<H<M$. Conform ipotezei şi lui [70, 6.9.4], rezultă că H/N este ciclic şi de torsiune. Pentru orice $p\in P$, $pH\subseteq N$. Deci:

$P\subseteq An(H/N)=(r)$,

unde $r\in R$. Rezultă că există un $t\in R$ astfel încât:

p=t·r.

Acum distingem două cazuri:

<u>Cazul I:</u> r este asociat cu p. În acest caz,

P=(r)

şi, conform ipotezei,

M/N=H/N

- contradicţie cu presupunerea făcută.

<u>Cazul II:</u> r este inversabil. În acest caz,

(r)=R şi H=M

- iarăşi am obţinut o contradicţie cu presupunerea făcută. Rezultă că M/N este un R-modul simplu.

3) implică **1)** Dacă M/N este un R-modul simplu, atunci [10, 2.10] arată că N este un submodul maximal al lui M. □

Definiţie: *Dacă M şi N satisfac la condiţiile de la (3.3.4.1) vom spune că N este un submodul (maximal) de indice p, al lui M.*

Propoziţia 3.3.4.2: *Pentru orice R-modul M, au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Submodulul N este maximal în M dacă şi numai dacă N este de indice prim (în M)*;

2) *Intersecţia tuturor submodulelor maximale de indice p, ale lui M, este pM*;

3) $F(M)=\bigcap_{p\in P} pM$,

unde p parcurge mulţimea tuturor elementelor prime neasociate, ale lui R;

4) *M este divizibil dacă şi numai dacă*:

$M=F(M)$;

5) *Dacă M este fără-torsiune, iar N şi H sunt submodule ale lui M, atunci are loc egalitatea*:

$F(N\cap H)=F(N)\cap F(H)$;

6) *Dacă H este un submodul în F(M), atunci există N - submodul în M astfel încât:*

$F(N)=H$;

în plus, dacă H este un sumand direct în F(M), atunci N este un sumand direct în M;

7) *Dacă M este fără-torsiune, iar N şi H sunt submodule în M, atunci*:

$t(N)\leq t(H)$ *dacă şi numai dacă* $t(F(N))\leq t(F(H)$,

unde t(K) notează tipul R-modulului K;

8) *Dacă N este pur în M (în particular, dacă N este un sumand direct al lui M), atunci*:

$F(N)=N\cap F(M)$.

***Demonstrație*: 1)** Această afirmație rezultă din (3.3.4.1) și din definiția de mai sus.
2) Fie $F_p(M)$ intersecția tuturor submodulelor maximale de indice p, ale lui M, cu p - element prim din R. Dacă N este un submodul al lui M, de indice p, atunci $pM \subseteq N$. Rezultă că $pM \subseteq F_p(M)$. (∗) R-modulul M/pM este un p-R-modul elementar, deci:

$$F(M/pM)=0.$$

Rezultă că intersecția tuturor submodulelor maximale N_i/pM, $i \in I$, ale lui M/pM, este pM. Dar, atunci N_i, $i \in I$, sunt submodule maximale (de indice p) ale lui M și $\bigcap_{i \in I} N_i \subseteq pM$. (∗∗) Din relațiile (∗) și (∗∗) obținem că:

$$F_p(M)=pM.$$

3) Egalitatea din enunț rezultă din cele demonstrate la punctul 2) și din faptul că:

$$F(M)=\bigcap_p F_p(M),$$

când p parcurge mulțimea tuturor elementelor prime neasociate, ale lui R.
4) Dacă M este divizibil, atunci:

$$pM=M,$$

oricare ar fi p - un element prim din R. Rezultă că:

$$M=F(M).$$

Reciproc, dacă:

$$M=F(M),$$

atunci $M \subseteq pM$, oricare ar fi p un element prim din R. Deci, pentru orice p aparținând mulțimii P a tuturor elementelor prime neasociate, ale lui R, M este p-divizibil. Conform cu [41, 20.(A)], M este divizibil.
5) Fie $x \in F(N) \cap F(H)$. Atunci, pentru orice $p \in P$, există un $n_p \in N$ și există un $h_p \in H$ astfel încât:

$$x=p \cdot n_p=p \cdot h_p.$$

Din ipoteză rezultă că:

$$n_p=h_p$$

și $x \in F(N \cap H)$. Așadar $F(N) \cap F(H) \subseteq F(N \cap H)$ și cum incluziunea inversă are loc întotdeauna, obținem egalitatea din enunț.
6) Fie H un submodul al lui:

$$F(M)=\bigcap_p F_p(M)$$

și D - învelitoarea divizibilă a lui H. Pentru fiecare $p \in P$, considerăm mulțimea:

$$N_p=\{m \in M \cap D \mid p \cdot m \in H\}.$$

Se arată ușor că:

N_p este un submodul al lui M și $pN_p=H$.

Dacă:

$N=\{m\in M\cap D \mid \text{pentru orice } p\in P,\ p\cdot m\in H\}$,

atunci:

$N=\bigcap_{p\in P} N_p$ şi $F(N)=\bigcap_{p\in P} pN = H$.

Dacă H este un sumand direct în F(M), atunci, conform cu [28, Teorema 5.d)], N este un sumand direct în M.

7) Fie M un R-modul fără-torsiune, N şi H două submodule în M, cu $t(N)\leq t(H)$, şi fie $n\in N$ cu:

$r=p$

- înălţimea lui n în N; deci:

$r=h_N^p(n)$.

Atunci $n\in p^rN$ şi $n\notin p^{r+1}N$. Deoarece $n\in p^{r-1}(pN)$ şi $n\notin p^r(pN)$, rezultă că:

$h_{pN}^p(n)=r-1$.

Rezultă că dacă $n\in F(N)$ şi:

$\chi_N=(k_1,\ldots,k_l,\ldots)$

este caracteristica lui n în N, atunci, caracteristica aceluiaşi n în F(N) este:

$\chi_{F(N)}=(k_1-1,\ldots,k_l-1,\ldots)$.

Considerăm, acum, un $u\in F(N)$ şi un $v\in F(H)$ şi fie:

$t_1'=t_{F(N)}(u)=(a_1,\ldots,a_l,\ldots)$ şi $t_2'=t_{F(H)}(v)=(b_1,\ldots,b_l,\ldots)$

tipurile elementelor u, respectiv v, reprezentate de câte o caracteristică a lor. Din cele demonstrate mai sus, rezultă că:

$t_1=t_N(u)=(a_1+1,\ldots,a_l+1,\ldots)$ şi $t_2=t_H(v)=(b_1+1,\ldots,b_l+1,\ldots)$.

Conform ipotezei, $t_1\leq t_2$; dar această inegalitate are loc dacă şi numai dacă, pentru orice $i\geq 1$, $a_i\leq b_i$, ceea ce este echivalent cu faptul că $t(F(N))\leq t(F(H))$.

8) Fie, deci, N un submodul pur în M. Atunci, pentru orice $p\in P$,

$pN=N\cap pM$

şi, în acest caz,

$F(N)=\bigcap_{p\in P} pN=\bigcap_{p\in P}(N\cap pM)=N\cap(\bigcap_{p\in P} pM)=N\cap F(M)$. □

Teorema 2.3.4.2 poate fi extinsă la R-module peste domenii cu ideale principale:

Teorema 3.3.4.3: *Dacă R este un domeniu cu ideale principale şi M_i, $i\in I$, este o familie de R-module, atunci are loc egalitatea*:

$$F(\bigoplus_{i\in I} M_i)=\bigoplus_{i\in I} F(M_i). \quad (61)$$ □

Ca şi în secţiunea (2.3.4), putem trece, acum, la rezolvarea problemei noastre.

Teorema 3.3.4.4: *Dacă M este un R-modul cu P.I.S.D., care nu este mixt redus, atunci (şi) F(M) are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Fie M un R-modul ca şi în enunţ. Vom distinge trei cazuri:

Cazul 1: M este de torsiune. În acest caz, conform cu [70, 6.11.3]:

$$M=\bigoplus_{p\in P} M_p,$$

unde M_p este un p-R-modul, de torsiune, cu P.I.S.D., iar:

$$F(M)=\bigoplus_{p\in P} F(M_p).$$

Dacă M_p este idecompozabil, atunci şi $F(M_p)$ este idecompozabil, conform cu (3.3.4.3) şi (3.3.4.1)6). Dacă M_p nu este idecompozabil, atunci, conform cu [69, 10.19], [78, p. 36] (1.2.2.1) şi (1.2.3.3),

$$M_p=N_p\oplus D_p,$$

unde N_p este un p-R-modul elementar, iar D_p este un p-R-modul divizibil. Deci, în acest caz,

$$F(M_p)=F(N_p)\oplus F(D_p)=D_p.$$

Aşadar, pentru orice $p\in P$, $F(M_p)$ are P.I.S.D.. Deoarece, pentru orice $p\in P$, $F(M_p)$ este total invariant în F(M), rezultă, conform lui (1.2.1.1) şi lui (1.1.2), că F(M) are P.I.S.D..

Cazul 2: M este fără-torsiune. Fie U şi V doi sumanzi direcţi în F(M). Conform cu (3.3.4.1)6), există N şi H - sumanzi direcţi în M astfel încât:

$$F(N)=U \quad \text{şi} \quad F(H)=V.$$

Conform ipotezei şi lui (3.3.4.1)5),

$$U\cap V=F(N)\cap F(H)=F(N\cap H)$$

este un sumand direct în F(M).

Cazul 3: M este mixt, neredus. În acest caz, conform cu [69, 4.10.19], (1.2.2.1) şi (1.2.2.5),

$$M=D\oplus T\oplus U,$$

unde:

- D este divizibil şi fără-torsiune;
- T este redus şi de torsiune;

iar,

- U este fără-torsiune, omogen, complet decompozabil, de rang finit.

Din (3.3.4.1)7) şi (3.3.4.3) rezultă că F(U) este şi el (tot) fără-torsiune, omogen, complet decompozabil şi de rang finit. Deoarece:

$$F(T)=0$$

(vezi Cazul 1), rezultă că, în acest caz,

F(M)=D⊕F(U)

satisface la condiţiile de la (1.2.2.6), deci are P.I.S.D.. □

Dacă inelul R are o infinitate de numere prime, atunci, pentru orice R-modul ciclic infinit M:

F(M)=0,

iar din (3.3.4.3) rezultă că această egalitate are loc şi pentru orice R-modul liber, M.

Observaţia 3.3.4.5: *Reciproca lui (3.3.4.4) nu este, în general, adevărată, adică: există R-module M, cu proprietatea că F(M) are P.I.S.D., fără ca M să aibă această proprietate.*

***Demonstraţie*:** Contraexemplu, fie:

M=D⊕U⊕L,

unde:

- D este divizibil şi fără-torsiune;
- U este fără-torsiune, omogen, complet decompozabil, de rang finit;

iar,

- L este liber şi fără-torsiune.

Atunci:

F(M)=D⊕F(U)

are P.I.S.D., iar dacă U şi L au tipuri diferite, atunci M nu are P.I.S.D.. □

Sintetizând cele obţinute în această secţiune, referitor la R-modulul cât M/F(M), obţinem:

Propoziţia 3.3.4.6: *Fie M un R-modul cu P.I.S.D. şi F(M) - submodulul său Frattini. În oricare din următoarele situaţii, M/F(M) are P.I.S.D.*:

1) *M este un p-R-modul*;
2) *M este un R-modul de torsiune în care, pentru orice element prim p, din R, p-componenta lui M ori este elementară, ori este un R-modul divizibil*;
3) *M este un R-modul liber*;
4) *M este un R-modul divizibil*;
5) *M este suma directă dintre un R-modul liber, de rang finit şi un R-modul divizibil, fără-torsiune*;
6) *M este suma directă dintre un R-modul elementar, un R-modul divizibil, fără-torsiune şi un R-modul liber, de rang finit.* □

3.3.5. Submodule p-bazice

Fie R un domeniu cu ideale principale, M un R-modul şi p un element prim (oarecare) din R. În această secţiune vom rezolva problema analoagă celor din secţiunile precedente ale acestui subcapitol, pentru submodulele p-bazice.

Definiţie: *Fie M un R-modul şi p un element prim (oarecare) din R. Un submodul N, al lui M, se numeşte submodul p-bazic, dacă satisface la următoarele condiţii*:

1) *N este o sumă directă de p-module ciclice şi de module ciclice infinite*,
2) *N este p-pur în M*,
3) *M/N este p-divizibil*.

Făcând o teorie analoagă celei din [41, 32.2 şi 35.2], obţinem că orice R-modul conţine, pentru orice element prim p, din R, submodule p-bazice, şi acestea sunt izomorfe.

Conform definiţiei, dacă N este un submodul p-bazic în M, atunci:

$$N=N_0\oplus N_1\oplus\ldots\oplus N_k\oplus\ldots, \tag{62}$$

unde:

$$N_0\cong\oplus R$$

şi, pentru orice $k\in\mathbf{N}^*$,

$$N_k\cong\oplus R/(p^k).$$

Din cele de mai sus rezultă:

Observaţia 3.3.5.1: *R-modulul M este p-bazic (în M) dacă şi numai dacă M este de forma lui N, din relaţia (62).* □

Observaţia 3.3.5.2: *Submodulul 0 este p-bazic în M dacă şi numai dacă M este p-divizibil.* □

Din (3.3.5.2) obţinem:

Observaţia 3.3.5.3: *Dacă M este divizibil, atunci submodulul său p-bazic (fiind 0) are, în mod trivial, P.I.S.D., indiferent dacă M are, sau nu, această proprietate.* □

Ca şi în Secţiunea 2.3.5, în investigaţiile noastre vom folosi foarte mult rezultatul de la (2.3.5.4), care poate fi generalizat la R-module peste domenii cu ideale principale, astfel:

Teorema 3.3.5.4: *Dacă M_i, $i\in I$, sunt R-module şi N_i, $i\in I$, este un submodul p-bazic în M_i, $i\in I$, atunci $\bigoplus_{i\in I} N_i$ este un submodul p-bazic în $\bigoplus_{i\in I} M_i$.* □

Vom nota, în continuare, cu N_M submodulul p-bazic al R-modulului M. Atunci, conform lui (3.3.5.4), are loc relaţia:

$$N_{(\bigoplus_{i\in I} M_i)}=\bigoplus_{i\in I} N_{M_i}\ . \tag{63}$$

Şi în acest caz, începem rezolvarea problemei noastre tot cu p-R-modulele.

Propoziţia 3.3.5.5: *Dacă M este un p-R-modul cu P.I.S.D., atunci şi N_M are P.I.S.D.*.

***Demonstraţie*:** Dacă există un $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$M\cong R/(p^n),$$

atunci:

$N_M=M$,

conform cu (3.3.5.1). Dacă M este divizibil şi idecompozabil, atunci, conform cu (3.3.5.3),

$N_M=0$.

Dacă există un cardinal m_p astfel încât:

$M\cong(\oplus_{m_p} R/(p))\oplus D_p$,

unde:

$D_p=0$ sau D_p este divizibil şi idecompozabil,

atunci,

$N_M\cong\oplus_{m_p} R/(p)$,

vezi (3.3.5.1), (3.3.5.2) şi (3.3.5.4). În toate cele trei cazuri N_M are P.I.S.D.. □

Corolarul 3.3.5.6: *Dacă M este un R-modul de torsiune cu P.I.S.D., atunci şi N_M are aceeaşi proprietate.*

***Demonstraţie*:** Fie,

$M=\bigoplus_{p\in P_1} M_p$

un R-modul de torsiune cu P.I.S.D., unde P_1 este o submulţime a lui P şi, pentru orice $p\in P_1$, M_p este un p-R-modul cu P.I.S.D., conform cu (1.2.1.1) şi (1.1.3). Conform cu (3.3.5.4) şi (3.3.5.5),

$N_M=\bigoplus_{p\in P_1} N_{M_p}$,

unde, pentru orice $p\in P_1$, N_{M_p} este un p-R-modul cu P.I.S.D.. Deoarece, pentru orice $p\in P_1$, N_{M_p} este un p-R-modul total invariant în N_M, rezultă că (1.2.1.1) şi (1.1.2) completează demonstraţia. □

Pentru studiul submodulelor p-bazice ale R-modulelor fără-torsiune, cu P.I.S.D., avem nevoie (şi) de rezultatul de la (2.3.5.7), generalizat pentru cazul nostru:

Teorema 3.3.5.7: *Fie M un R-modul redus, fără-torsiune, de rang unu. Dacă M nu este izomorf cu R, atunci*:

$N_M=0$.

***Demonstraţie*:** Dacă M este ca şi în enunţ, atunci, deoarece rangul lui N_M este cel mult egal cu 1 şi N_M este de forma (62), rezultă că:

$N_M=0$ sau $N_M\cong R$.

Dacă,

$N_M\cong R$,

atunci, abstracţie făcând de un izomorfism, R este p-pur în M, adică, pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$:

$$p^kR=R\cap p^kM. \quad (*)$$

Dacă M conţine cel puţin un element m cu proprietatea că:

$p\cdot m=q$, cu $q\in R$ şi $(p,q)=1$,

atunci egalitatea (∗) nu are loc şi R nu este p-pur în M. Presupunem, acum, că M nu conţine nici un element m cu proprietatea de mai sus şi că M/R este p-divizibil. Atunci, pentru orice $y\in M$, ecuaţia:

$$p\cdot(x+R)=y+R$$

are o soluţie $m+R\in M/R$. Deci, pentru orice $y\in M$, există un $m\in M$ astfel încât:

$$p\cdot m-y=r\in R.$$

Dacă $y\in R$ şi:

$(p,r)=1$ sau $(p,y)=1$,

atunci obţinem o contradicţie cu presupunerea noastră, iar dacă M nu are nici un submodul izomorf cu R, atunci:

$$N_M=0.$$

Rezultă că R nu poate fi un submodul p-bazic al lui M. □

Din (3.3.5.7) obţinem:

Corolarul 3.3.5.8: *Dacă M este un R-modul fără-torsiune cu P.I.S.D., atunci N_M are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Distingem, şi aici, trei cazuri:

Cazul 1: Dacă M este un R-modul fără-torsiune, neredus, cu P.I.S.D., atunci, conform cu (1.2.2.5),

$$M=D\oplus U,$$

unde D este divizibil, iar:

$$U=\oplus_k H,$$

unde k este un număr natural, iar H este un R-modul redus, de rang unu. În acest caz obţinem, conform lui (3.3.5.3), (3.3.5.2) şi lui (3.3.5.7), că:

$$N_M=\oplus_k N_H,$$

unde:

($N_H=0$, dacă H nu este izomorf cu R) sau ($N_H\cong\oplus_k R$, în caz contrar).

Deci, conform lui [58, p. 49], N_M are P.I.S.D..

Cazul 2: Dacă M este redus şi este de forma:

$$M=\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{k_i} M_i),$$

unde, pentru orice $i\in I$, k_i este un cardinal oarecare, iar M_i este un R-modul (redus) de rang unu şi, pentru orice i_1, $i_2\in I$, $i_1\neq i_2$, $t(M_{i_1})$ şi $t(M_{i_2})$ sunt incomparabile. În acest caz, notând ca şi în (2.2.3.6), pentru fiecare $i\in I$, cu:

$$M_i^*=\oplus_{k_i} M_i,$$

obţinem că:

$$N_M=\bigoplus_{i\in I} N_{M_i^*}$$

şi, pentru orice $i\in I$,

$N_{M_i^*}=0$ sau $N_{M_i^*}$ este un R-modul liber.

Atunci, iarăşi, [58, p. 49] arată că N_M are P.I.S.D..

<u>Cazul 3:</u> R-modulul M este redus şi este de forma:

$$M=(\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{n_i} H_i))\oplus(\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{m_i} M_i)),$$

unde:

- pentru orice $i\in I$, n_i este un număr natural şi H_i este un R-modul (redus) de rang unu şi de tip ν_i, m_i este un cardinal oarecare, iar M_i este un R-modul (redus) de rang unu şi de tip μ_i, cu $\nu_i<\mu_i$

şi,

- pentru orice i_1, $i_2\in I$, $(t(G_{i_1}),t(G_{i_2}))$ şi $(t(B_{i_1}),t(B_{i_2}))$ sunt perechi de tipuri incomparabile.

Atunci:

$$N_M=\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{n_i} N_{H_i}),$$

unde, pentru orice $i\in I$,

$N_{H_i}=0$, sau N_{H_i} este un R-modul liber.

Aşadar, şi în acest caz, [58, p. 49] completează demonstraţia. □

Corolarul 3.3.5.9: *Dacă M este un R-modul mixt scindabil, cu P.I.S.D., atunci N_M are P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Enunţul rezultă din (1.2.2.5), (3.3.5.4), (3.3.5.6), (3.3.5.7), (3.3.5.2) şi (3.3.5.8). □

Se impun aici câteva observaţii.

Observaţia 3.3.5.10: *Există R-module divizibile M, cu*:

$N_M=0$,

fără ca M să aibă P.I.S.D..

***Demonstraţie*:** Contraexemplu: fie,

$M=D\oplus D$,

unde D este un p-R-modul divizibil, idecompozabil şi de torsiune. Atunci:

$N_M=0$

are, în mod trivial, P.I.S.D., dar M, conform lui (1.2.2.2), nu are P.I.S.D.. □

Observaţia 3.3.5.11: *Din (3.3.5.10) rezultă că reciproca lui (3.3.5.5) este, în general, falsă, adică: există p-R-module M cu proprietatea că N_M are P.I.S.D., fără ca M să aibă P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Contraexemplu: fie,

$M=H\oplus D\oplus D$,

unde:

$H\cong R/(p)$,

iar D are aceeaşi semnificaţie ca şi la (3.3.5.10). Atunci:

$N_M\cong R/(p)$

are P.I.S.D., dar M, conform lui (1.2.2.2), nu are P.I.S.D.. □

Observaţia 3.3.5.12: *Din (3.3.5.7) rezultă că reciproca lui (3.3.5.8) este, în general, falsă, adică: există R-module M, fără-torsiune, cu proprietatea că N_M are P.I.S.D., fără ca M să aibă P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Contraexemplu: fie,

$M=D\oplus H$,

unde:

- D este un R-modul divizibil şi fără-torsiune;
- $H\cong(\oplus_k R)$,

iar,

- k este un cardinal transfinit.

Atunci:

$N_M\cong\oplus_k R$

are P.I.S.D., dar M, conform lui (1.2.2.5), nu are P.I.S.D.. □

Observaţia 3.3.5.13: *Din (3.3.5.10) (sau (3.3.5.12)) rezultă că reciproca lui (3.3.5.9) este, în general, falsă, adică: există R-module mixte, scindabile, M cu proprietatea că N_M are P.I.S.D., fără ca M să aibă P.I.S.D..*

***Demonstraţie*:** Contraexemplu, fie:

$M=D\oplus D\oplus E\oplus H$,

unde:

- D este un R-modul divizibil, de torsiune;
- E este un R-modul divizibil, fără-torsiune;

- $H \cong \oplus_k R$,

iar,

- k este un cardinal transfinit.

Atunci:

$$N_M \cong \oplus_k R$$

are P.I.S.D., dar M, conform lui (1.2.2.5), nu are P.I.S.D.. □

În continuare prezentăm câteva clase de R-module M, pentru care R-modulul factor M/N_M are şi el P.I.S.D..

Propoziţia 3.3.5.14: *Fie M un R-modul, p un număr prim oarecare şi N_M submodulul p-bazic al lui M. În oricare din următoarele situaţii, R-modulul factor M/N_M are P.I.S.D.*:

1) *M este un p-R-modul cu P.I.S.D.*;

2) *M este un R-modul de torsiune cu P.I.S.D.*;.

3) *M este un R-modul liber*;

4) *M este un R-modul divizibil cu P.I.S.D.*;

5) *R-modulul*:

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

este fără-torsiune, cu P.I.S.D. şi, pentru orice $i\in I$, partea redusă a lui M_i este un R-modul complet decompozabil, omogen, de rang finit;

6) *M este un R-modul de forma*:

$$M=(\bigoplus_{p\in P_1} M_p)\oplus D\oplus H\oplus(\bigoplus_{i\in I}(\oplus_{k_i} S_i), \quad (64)$$

unde:

- *P_1 este o submulţime a lui P şi, pentru orice $p\in P_1$, M_p este un p-R-modul cu P.I.S.D.*;
- *D este un R-modul divizibil*;
- *$H\cong\oplus_{k_0} R$,*

  unde k_0 este un cardinal oarecare;
- *pentru orice $i\in I$, k_i este un cardinal oarecare, iar S_i este un R-modul redus, omogen, fără-torsiune şi complet decompozabil*.

***Demonstraţie*:** **1)** Conform cu (3.3.5.5), dacă M este un p-R-modul cu P.I.S.D., atunci:

$M/N_M=0$ sau M/N_M este un p-R-modul divizibil, de torsiune şi cu P.I.S.D..

2) Din (3.3.5.5) şi (3.3.5.6) rezultă că dacă R-modulul M este ca şi în enunţ, atunci:

$M/N_M=0$, sau M/N_M este un R-modul divizibil, de torsiune, cu P.I.S.D..

3) Fie M un R-modul liber. Atunci, conform cu [70, 6.4.28, 6.4.10 şi 6.4.2.d)],

$N_M=M$ şi $M/N_M=0$.

4) Dacă M este un R-modul divizibil, atunci:

$N_M=0$ şi $M/N_M \cong M$.

5) Fie:

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

un R-modul ca şi în enunţ. Presupunem, mai întâi, că M este redus. În acest caz, conform ipotezei, pentru orice $i\in I$, M_i este complet decompozabil şi omogen. Introducem pe I următoarea relaţie de echivalenţă, notată cu „≈" şi prezentată în (1.2.1.8): pentru orice $i_1, i_2\in I$,

prin definiţie, $i_1\approx i_2$ dacă şi numai dacă $M_{i_1}\cong M_{i_2}$.

Pentru un $i\in I$, notăm cu i^* clasa de echivalenţă a lui i, deci:

$i^*=\{k\in I \mid M_k\cong M_i\}$.

Atunci $\{i^*\}_{i\in I}$ este partiţia lui I, corespunzătoare relaţiei „≈", iar:

$$M=\bigoplus_{i^*\in I/\approx} M_{i^*},$$

unde:

$$M_{i^*}=\bigoplus_{k\in i^*} M_k.$$

Pe de altă parte, pentru orice $i_1, i_2\in I$, care nu sunt echivalente, $M_{i_1^*}$ şi $M_{i_2^*}$ sunt total invariante în M. Deci, în acest caz,

$$N_M=\bigoplus_{i^*\in I/\approx} N_{M_{i^*}},$$

iar $N_{M_{i^*}}$ este izomorf cu o sumă directă de tipul $\oplus_j(\oplus_{j_i} R)$, dacă, există $j\in i^*$ astfel încât M_j are un sumand direct izomorf cu $\oplus_{j_i} R$, iar însumarea are loc după toţi aceşti $j\in i^*$, sau:

$N_{M_{i^*}}=0$,

dacă, pentru orice $j\in i^*$, M_j nu are nici un sumand direct izomorf cu R. Deci M/N_M este izomorf cu un sumand direct al lui M şi, conform cu (1.2.1.1) şi (1.1.1), M/N_M are P.I.S.D.. Presupunem acum că M este neredus. Atunci:

$M=D\oplus U$,

unde:

- D este divizibil,

și:

- U este redus, complet decompozabil, de rang finit.

Deci, în acest caz, M/N_M este sau izomorf cu M, sau este izomorf cu D.
6) Enunţul rezultă din (3.3.5.4), (3.3.5.5), (3.3.5.1), (3.3.5.2) şi (3.3.5.7). □

Din (1.2.2.5)2) şi (3.3.5.14)6) obţinem:

Corolarul 3.3.5.15: *Dacă M este un R-modul mixt, neredus, cu P.I.S.D., şi N_M este submodulul său p-bazic, pentru un $p\in P$, atunci M/N_M are P.I.S.D..* □

În finalul secţiunii se mai impune o (altă) observaţie:

Observaţia 3.3.5.16: *Există R-module M, cu proprietatea că R-modulul factor M/N_M are P.I.S.D., fără ca M sau N_M să aibă această proprietate.*

***Demonstraţie*:** Contraexemplu: fie,

$$M\cong(\bigoplus_{p\in P_0} M_p)\oplus D\oplus(\oplus_{k_0} R)\oplus(\oplus_{k_1} H), \tag{65}$$

unde:

- P_0 este o submulţime a mulţimii P a tuturor elementelor prime neasociate, din R, şi, pentru orice $p\in P_0$, M_p este un p-R-modul redus;
- D este un R-modul divizibil fără-torsiune;
- k_0 şi k_1 sunt numere naturale nenule;
- H este un R-modul redus, omogen, fără-torsiune, complet decompozabil şi care nu este izomorf cu R.

Atunci M nu are P.I.S.D. (în acest sens este suficient să considerăm că cel puţin un M_p nu este elementar - vezi (2.1.2.2)) şi:

$$N_M\cong(\bigoplus_{p\in P_0} M_p)\oplus(\oplus_{k_0} R).$$

Rezultă că N_M nu are P.I.S.D., dar:

$$M/N_M\cong D\oplus(\oplus_{k_1} H)$$

are această proprietate. □

CAPITOLUL 4

MODULE CU P.S.S.D.

Aşa cum am precizat şi în partea de introducere a acestei cărţi, în [84] am introdus noţiunea de „*R-modul (grup abelian) cu proprietatea sumei sumanzilor direcţi*” ca fiind acel R-modul (grup abelian) M, care are proprietatea că suma oricăror doi sumanzi direcţi (adică submodulul (subgrupul) lui M generat de reuniunea lor) este tot un sumand direct în M, şi am prezentat primele caracterizări ale R-modulelor cu această proprietate (vezi Secţiunea 3.1.3).

Tot acolo am introdus şi noţiunea de R-modul (grup abelian) care are complet (sau total) proprietatea sumei sumanzilor direcţi, prescurtat C.P.S.S.D., ca fiind acel R-modul (grup abelian) care are proprietatea că suma oricărei familii de sumanzi direcţi (adică submodulul (subgrupul) lui M generat de reuniunea lor) este tot un sumand direct în M, şi am propus spre rezolvare următoarea problemă deschisă:

- „*Să se caracterizeze R-modulele (grupurile abeliene) cu proprietatea sumei sumanzilor direcţi*”.

Această problemă este duala problemei lui Kaplansky - Fuchs, la care s-a referit, până aici, prezenta carte.

Avem aici o (primă) observaţie:

Observaţia 4.1: *Dacă un R-modul M are C.P.S.S.D., atunci el are şi P.S.S.D.; reciproca, în general, este falsă.*

***Demonstraţie*:** Într-adevăr, fie R un inel ereditar stâng, ne-Noetherian. Atunci există o familie infinită $\{M_i\}_{i\in I}$ de R-module injective astfel încât $\bigoplus_{i\in I} M_i$ nu este injectiv. Conform Lemei lui Zorn alegem o astfel de familie independentă. Atunci R-modulul:

$$M=\prod_{i\in I} M_i$$

este injectiv şi are P.S.S.D. - conform lui (4.1.11), dar:

$$\sum_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i$$

nu este un sumand direct în M. Rezultă că M nu are C.P.S.S.D.. □

În acest capitol vom prezenta alte caracterizări ale acestor R-module, rezultate referitoare la anumite clase de R-module (injective sau proiective) peste diferite inele, precum şi rezultate referitoare la grupurile abeliene cu această proprietate.

4.1. MODULE ȘI INELE CU P.S.S.D.

Aşa cum am precizat mai sus, ne propunem aici să prezentăm câteva caracterizări ale R-modulelor cu proprietatea sumei sumanzilor direcţi (prescurtat P.S.S.D.). Peste tot în acest subcapitol, cu R vom nota un inel asociativ, cu unitate, iar modulele vor fi considerate (stângi) peste aceste inele. Ca şi în secţiunile precedente, orice alte condiţii asupra inelului R, sau R-modulelor, vor fi puse ori de câte ori va fi cazul.

Prezentăm, mai întâi, câteva rezultate analoage celor de la R-modulele cu P.I.S.D..

Observaţia 4.1.1: *Dacă R-modulul M are P.S.S.D. (respectiv C.P.S.S.D.), atunci orice sumand direct al lui M are P.S.S.D. (respectiv C.P.S.S.D.).*

***Demonstraţie*:** Fie M un R-modul cu P.S.S.D. şi fie A un sumand direct în M. Dacă T şi S sunt doi sumanzi direcţi în A, atunci T+S este un sumand direct în M, dar conţinut în A. Rezultă că T+S este un sumand direct în A şi A are P.S.S.D..

Demonstraţia pentru C.P.S.S.D. este analoagă. □

Rezultatul analog lui (1.2.1.2) este:

Propoziţia 4.1.2: *Fie M un R-modul. Atunci M are P.S.S.D. dacă şi numai dacă, pentru orice pereche de sumanzi direcţi T şi S, $\pi^{-1}(\pi(T))$ este un sumand direct în M, unde*:

$$\pi : M \to S$$

este proiecţia canonică a lui M pe S.

***Demonstraţie*:** Presupunem că M are P.S.S.D.. Dacă T şi S sunt sumanzi direcţi ai lui M şi:

$$\pi : M \to S$$

este proiecţia canonică a lui M pe S, atunci:

$$\pi^{-1}(\pi(T))=T+S'$$

este un sumand direct în M, unde S' este un complement al lui S în M.

Reciproc, presupunem că M are a doua proprietate din enunţ. Dacă:

$$M=S\oplus S'=T\oplus T'$$

sunt două descompuneri (oarecari) ale lui M şi:

$$\rho : M \to S'$$

este proiecţia canonică a lui M pe S', atunci:

$$\rho^{-1}(\rho(T))=T+S$$

este un sumand direct în M şi, astfel, M are P.S.S.D.. □

Ca şi în cazul R-modulelor cu P.I.S.D., reciproca lui (4.1.1) este adevărată pentru sumanzi direcţi total invarianţi.

Lema 4.1.3: *Fie R-modulul*:

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i,$$

unde, pentru orice $i\in I$, M_i este total invariant în M. Atunci:

M are P.S.S.D. (respectiv C.P.S.S.D.) dacă şi numai dacă, pentru orice $i\in I$, M_i are P.S.S.D. (respectiv C.P.S.S.D.).

Demonstraţie**:** Presupunem că M are P.S.S.D.. Conform cu (4.1.1), pentru orice $i\in I$, M_i are P.S.S.D..

Reciproc, presupunem că, pentru orice $i\in I$, M_i are P.S.S.D.. Fie T şi S doi sumanzi direcţi în M astfel:

$$M=S\oplus S'=T\oplus T'.$$

Atunci, conform ipotezei, pentru orice $i\in I$,

$$M_i=(S\cap M_i)\cap(S'\cap M_i)=(T\cap M_i)\cap(T'\cap M_i).$$

Rezultă că:

$$M=\bigoplus_{i\in I}[(S\cap M_i)\cap(S'\cap M_i)]=[\bigoplus_{i\in I}(S\cap M_i)]\oplus[\bigoplus_{i\in I}[(S'\cap M_i)]$$

şi:

$$S=\bigoplus_{i\in I}(S\cap M_i).$$

Analog se obţine că:

$$T=\bigoplus_{i\in I}(T\cap M_i).$$

Rezultă că:

$$T+S=[\bigoplus_{i\in I}(S\cap M_i)]+[\bigoplus_{i\in I}[(T\cap M_i)]=\bigoplus_{i\in I}[(S\cap M_i)+(T\cap M_i)]=\bigoplus_{i\in I} D_i,$$

unde:

$$D_i=(S\cap M_i)+(T\cap M_i)$$

este, conform ipotezei, un sumand direct în M_i. Aşadar, T+S este un sumand direct în M şi, deci, M are P.S.S.D..

Demonstraţia pentru C.P.S.S.D. este analoagă. □

Din (4.1.3) obţinem:

Corolarul 4.1.4: *Fie R un domeniu cu ideale principale şi P - mulţimea tuturor elementelor prime neasociate din R. Dacă*:

$$M=\bigoplus_{p\in P} M_p$$

este un R-modul de torsiune, descompus conform lui [70, 6.11.3], atunci M are P.S.S.D. (respectiv C.P.S.S.D.) dacă şi numai dacă, pentru orice $p\in P$, M_p are P.S.S.D. (respectiv C.P.S.S.D.).

***Demonstraţie*:** Fie R un inel şi:

$$M=\bigoplus_{p\in P} M_p$$

un R-modul ca şi în enunţ. Deoarece, pentru orice $p\in P$, M_p este total invariant în M, putem aplica (4.1.3). □

Un rezultat analog lui (1.2.1.3) este:

Propoziţia 4.1.5: *Dacă R-modulul M are P.S.S.D., atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *Pentru orice descompunere directă de forma*:

$$M=A\oplus B$$

şi orice morfism:

$$f : A \to B,$$

Imf este un sumand direct în B;

2) *Dacă A şi B sunt două R-module idecompozabile şi A⊕B este un sumand direct în M, atunci*:

a) *Hom(A,B)=0*,

sau,

b) *dacă există 0≠f∈Hom(A,B), atunci f este un epimorfism*.

***Demonstraţie*:** **1)** Fie S submodulul lui M generat de mulţimea $\{x+f(x) \mid x\in A\}$. Atunci:

$$S+B=S\oplus B=A\oplus B,$$

deoarece:

$S\cap B=0$ (verificarea este imediată).

Rezultă că:

$$S\cong A$$

este un sumand direct în M. Dar,

$$S\cap A=\ker f$$

şi, conform ipotezei,

$$S+A=A+\mathrm{Im}f=A\oplus \mathrm{Im}f$$

este un sumand direct în M. Rezultă că Imf este un sumand direct al lui M, dar conţinut în B; deci Imf este un sumand direct în B.

2) Fie A şi B două R-module ca şi în enunţ şi fie $0\neq f\in \mathrm{Hom}(A,B)$. Atunci, conform ipotezei şi celor demonstrate la punctul 1),

$$\mathrm{Im}f=B,$$

deci f este epimorfism. □

Se impune aici o observaţie:

Observaţia 4.1.6: *Reciproca lui (4.1.5)1) este, în general, falsă*.

***Demonstrație*:** Într-adevăr, fie R un inel noetherian, care nu este ereditar (stâng). Atunci, conform lui (4.1.11), există un R-modul injectiv M care nu are P.S.S.D.. Dacă:

$M=A\oplus B$

este o descompunere directă oarecare a lui M şi:

$f : A \to B$

este un morfism nenul (oarecare) de R-module, atunci Imf este un submodul injectiv al lui B; deci Imf este un sumand direct (în B). Aşadar M satisface la cerinţele de la (4.5.1)1), fără ca să aibă P.S.S.D.. □

Ca şi în (1.2.1.6), folosind (4.1.5), putem clasifica anumite inele R în termenii în care anumite R-module M au P.S.S.D. şi putem îmbunătăţii aceste rezultate.

Teorema 4.1.7: *Următoarele afirmaţii sunt echivalente, pentru un inel R*:

1. ***1)*** *R este artinian semi-simplu*;
2. ***2)*** *Toate R-modulele au C.P.S.S.D.*;
3. ***3)*** *Toate R-modulele au P.S.S.D.*;
4. ***4)*** *Toate R-modulele proiective au P.S.S.D.*.

***Demonstraţie*:** Se observă imediat că **1)** implică **2)** implică **3)** implică **4)**. Vom demonstra că **4)** implică **1)**. Fie P un R-modul proiectiv şi fie N un submodul al lui P. Considerăm, în baza lui [70, 6.4.14], un R-modul liber F şi un epimorfism:

$f : F \to N.$

Conform ipotezei şi lui [70, 6.7.5], F⊕P are P.S.S.D.. Deci:

N=Imf

este un sumand direct în P. Rezultă că orice submodul al lui P este un sumand direct în P. Atunci, conform cu [10, 9.6], P şi orice R-modul factor al lui P sunt R-module semi-simple, deoarece orice imagine omomorfică a unui R-modul semi-simplu este tot un R-modul semi-simplu (vezi [78, 3.6]). Cum orice R-modul este izomorf cu un R-modul factor al unui R-modul proiectiv, conform cu [70, 6.7.6], rezultă că, în cazul nostru, orice R-modul este izomorf cu un R-modul semi-simplu; deci, inelul R este semi-simplu. În acest caz, orice R-modul este injectiv; fie M un astfel de R-modul şi fie T şi S două submodule ale lui M. Atunci T∩S este un submodul al lui M; deci T∩S este un sumand direct în M. Rezultă că T∩S este injectiv şi M satisface la condiţiile de la [34, Teorema 8, p. 62]. Conform cu [34, p. 63], R este Artinian şi, astfel, teorema este complet demonstrată. □

Acum rezultatul de la (1.2.1.6) poate fi îmbunătăţit:

Corolarul 4.1.8: *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru un inel R*:

1. ***1)*** *R este Artinian semi-simplu*;
2. ***2)*** *Toate R-modulele au C.P.S.S.D.*;
3. ***3)*** *Toate R-modulele au P.S.S.D.*;

4) *Toate R-modulele proiective au P.S.S.D.*;

5) *Toate R-modulele au C.P.I.S.D.*;

6) *Toate R-modulele au P.I.S.D.*;

7) *Toate R-modulele injective au P.I.S.D.*;

8) *Pentru orice R-modul M, S_M(=S(M)) este o latice completă*;

9) *Pentru orice R-modul M, S_M(=S(M)) este o latice*.

Demonstraţie: Echivalenţa afirmaţiilor din enunţ rezultă din (4.1.7), (3.1.3.4) şi, respectiv (1.2.1.6). □

Corolarul 4.1.9: *Dacă toate R-modulele proiective au P.S.S.D., atunci R este ereditar stâng*.

Demonstraţie: Orice inel semi-simplu este ereditar stâng, conform cu [75, p. 73].

Altfel: Din demonstraţia Teoremei 4.1.7 rezultă că orice submodul al unui R-modul proiectiv este, la rândul lui, tot proiectiv; aşadar, R este un inel ereditar stâng - conform cu [75, 4.10]. □

Şi aici se impune o observaţie:

Observaţia 4.1.10: *Reciproca lui (4.1.9) este, în general, falsă*.

Demonstraţie: Dacă R este un inel ereditar stâng, atunci suma oricăror doi sumanzi direcţi ai unui R-modul proiectiv M este un submodul proiectiv al lui M, care nu este, neaparat, un sumand direct (în M).

Altfel: Nu orice inel ereditar stâng este semi-simplu, de exemplu **Z**. □

Utilizând [34, Propoziţia 10, p. 62], pentru R-module injective, se poate demonstra uşor că afirmaţiile de la (3.1.3.8)2) şi (3.1.3.8)3) sunt echivalente pentru orice inel R.

Aşadar avem următoarul rezultat (vezi (3.1.3.8)):

Teorema 4.1.11: *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru un inel R*:

1) *Toate R-modulele injective au P.S.S.D.*;

2) *R este un inel ereditar stâng*. □

Aşa cum am precizat în secţiunea (1.2.2), pentru inele noetheriene R, toate R-modulele au un unic sumand direct injectiv maximal dacă şi numai dacă R este ereditar. În continuarea acestei secţiuni vom demonstra că modulele cu P.S.S.D. au un astfel de sumand direct unic, peste orice inel noetherian, rezultat analog lui (1.2.2.1).

Propoziţia 4.1.12: *Fie M un modul peste un inel Noetherian R. Dacă M are P.S.S.D., atunci M are un unic sumand direct injectiv maximal*.

Demonstraţie: Conform Lemei lui Zorn, putem alege o mulţime maximal independentă $\{E_i\}_{i\in I}$ de submodule injective idecompozabile, ale lui M. Deoarece R este Noetherian, rezultă că R-modulul:

$$E=\bigoplus_{i\in I} E_i$$

este şi el (tot) un R-modul injectiv şi, deci E este un sumand direct în M. Vom demonstra că E conţine toate submodulele injective ale lui M. Fie F un submodul injectiv (oarecare) al lui M. Conform ipotezei, E+F este un sumand direct în M. Presupunem că $F\not\subset E$. Atunci:

$$E+F=E\oplus G,$$

unde $G\neq 0$ este un sumand direct în M. Rezultă că $F\setminus E\subseteq G$. Fie $x\in F\setminus E$ şi fie F_1 cel mai mic sumand direct injectiv al lui F, care îl conţine pe x. Atunci F_1 nu este un sumand direct în E, dar F_1 are un sumand direct în G. În acest caz, mulţimea $\{E_i\}_{i\in I}$ nu conţine toţi sumanzii direcţi idecompozabili al lui F_1; deci, am obţinut o contradicţie cu alegerea lui $\{E_i\}_{i\in I}$. Rezultă că $F\subseteq E$ şi E este singurul sumand direct maximal injectiv al lui M. □

Acum demonstrăm un rezultat analog lui (1.2.1.7)2), pentru inele artiniene:

Propoziţia 4.1.13: *Fie R un inel comutativ Artinian şi M_1 şi M_2 două R-module injective idecompozabile, izomorfe, astfel încât $M_1\oplus M_2$ are P.S.S.D.. Atunci există un ideal prim P, al lui R, astfel încât, pentru orice $0\neq x\in M_1$,*

$$An(x)=P.$$

***Demonstraţie*:** Fie,

$$f : M_1 \to M_2$$

un izomorfism de R-module. Presupunem că există x, $y\in M_1\setminus\{0\}$ astfel încât $An(x)\neq An(y)$. Considerăm $a\in An(x)\setminus An(y)$ şi definim aplicaţia:

$$g : M_1 \to M_2$$

astfel: pentru orice $m\in M_1$,

$$g(m)=f(a\cdot m).$$

Se verifică imediat că g este un morfism de R-module. Conform ipotezei şi lui (4.1.5)1), Img este un sumand direct în M_2; deci:

$$Img=0 \qquad \text{sau} \qquad Img=M_2.$$

Observăm că:

$$g(x)=f(a\cdot x)=f(0)=0$$

şi:

$$g(y)=f(a\cdot y)\neq 0.$$

Aşadar, g nu este nici nul, nici injectiv. Rezultă că:

$$Img=M_2;$$

deci g este epimorfism. Rezultă că $f^{-1}\circ g$ este (şi el) epimorfism. Deoarece R este Artinian, conform cu [78, p. 120], M_1 este un R-modul Noetherian. Conform ipotezei şi lui [70, 6.5.8], rezultă că $f^{-1}\circ g$ este automorfism; deci g este monomorfism şi:

$$kerg=0,$$

ceea ce este imposibil, căci $\ker g\neq 0$. Aşadar, toate elementele din $M_1\setminus\{0\}$ au acelaşi anulator; fie acesta P. Deci:

$$P=An(M_1\setminus\{0\}).$$

Fie $m\in M_1\setminus\{0\}$ şi presupunem că $r\cdot s\in P$ şi $r\notin P$. Atunci $r\cdot m\neq 0$ şi $P\subseteq An(r\cdot m)$, pentru orice $m\in M_1\setminus\{0\}$. Dar:

$$An(r\cdot m)=P$$

şi, deoarece:

$$r\cdot s\cdot m=0,$$

rezultă că $s\in P$. Aşadar P este un ideal prim al lui R. □

Acum, rezultatul de la (1.2.1.8), pentru inele artiniene, poate fi îmbunătăţit astfel:

Teorema 4.1.14: *Fie R un inel comutativ Artinian şi M un R-modul injectiv. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *M are P.I.S.D.*;
2) *M are C.P.I.S.D.*;
3) *M are C.P.S.S.D.*;
4) *M are P.S.S.D.*.

***Demonstraţie*:** Conform cu (1.2.1.8), (3.1.3.4) şi (4.1), avem că: **1)** este echivalent cu **2)** care este echivalent cu **3)** care implică **4)**. Deci ne rămâne să demonstrăm doar că **4)** implică **3)**. Fie M un R-modul injectiv cu P.S.S.D.. Atunci, conform cu [78, Teorema 3.25, Corolar] şi [68, Teorema 2.5],

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i,$$

unde, pentru fiecare $i\in I$, M_i este un R-modul injectiv şi idecompozabil. Considerăm pe I următoarea relaţie de echivalenţă, notată cu „$\approx$” şi introdusă în (1.2.1.8): pentru orice $i_1, i_2\in I$, prin definiţie:

$$i_1\approx i_2 \qquad \text{dacă şi numai dacă} \qquad M_{i_1}\cong M_{i_2}.$$

Dacă, pentru un $i\in I$, notăm cu i^* clasa de echivalenţă a lui i, deci:

$$i^*=\{k\in I \mid M_k\cong M_i\},$$

atunci $\{i^*\}_{i\in I}$ este partiţia lui I, corespunzătoare relaţiei „$\approx$”, iar:

$$M=\bigoplus_{i^*\in I/\approx} M_{i^*},$$

unde:

$$M_{i^*}=\bigoplus_{k\in i^*} M_k.$$

Aşa cum am mai arătat (în (1.2.1.8)), pentru orice i_1, $i_2 \in I$, care nu sunt echivalente, $M_{i_1^*}$ şi $M_{i_2^*}$ sunt total invariante în M. Conform cu (4.1.3), este suficient să demonstrăm că, pentru orice $i \in I$, M_{i^*} are C.P.S.S.D.. Deci, pentru fiecare $i \in I$, M_{i^*} este o sumă directă de submodule injective, idecompozabile şi izomorfe. Dacă M_{i^*} este idecompozabil, atunci el are, în mod trivial, C.P.S.S.D.. Dacă M_{i^*} nu este idecompozabil, atunci există un ideal prim P al lui R astfel încât, pentru orice $k \in i^*$ şi orice $x \in M_k \setminus \{0\}$,

$$An(x)=P,$$

conform cu [68, 2.4 şi 3.1] (sau [78, Teorema 2.32, Corolar]) şi (4.1.13), iar:

$$M_{i^*} = \bigoplus_{k \in i^*} M_k \cong \oplus_{i^*} E(R/P);$$

deci M_{i^*} este o sumă directă de R-module injective idecompozabile de forma E(R/P). În acest ultim caz, se observă că E(R/P) este un modul injectiv, fără-torsiune, peste domeniul R/P; deci E(R/P) este izomorf cu corpul fracţiilor lui R/P, vezi [78, p. 50]. Aşadar, pentru orice $i \in I$, M_{i^*} este un spaţiu vectorial peste acest corp şi, astfel, pentru orice $i \in I$, M_{i^*} are C.P.S.S.D.. Acum demonstraţia este completă. □

Următoarele observaţii vor servi la îmbunătăţirea rezultatelor de la (4.1.8).

Observaţii 4.1.15: *Fie M un R-modul idecompozabil şi*:

$$M^* = M \oplus M.$$

Atunci au loc următoarele afirmaţii:

1) *Dacă M* are P.I.S.D., atunci fiecare endomorfism nenul al lui M este injectiv.*

2) *Dacă M* are P.S.S.D., atunci fiecare endomorfism nenul al lui M este surjectiv.*

3) *Dacă M* are şi P.I.S.D. şi P.S.S.D., atunci fiecare endomorfism nenul al lui M este automorfism.*

***Demonstraţie*:** Fie M un R-modul ca şi în enunţ.

1) Dacă M^* are P.I.S.D., atunci, conform cu (1.2.4.1), pentru fiecare endomorfism f, al lui M, kerf este un sumand direct în M. Deci,

kerf=0 sau kerf=M,

adică f este injectiv sau nul.

2) Aplicăm (4.1.5)2) pentru:

A=B=M.

3) Afirmaţia de la acest punct rezultă din cele demonstrate la punctele 1) şi, respectiv 2), de mai sus. □

Acum, pentru un inel artinian R vom obţine (noi) condiţii echivalente cu „*caracterul semi-simplu*”:

Corolarul 4.1.16: *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru un inel comutativ Artinian*:

1) *R este semi-simplu*;
2) *Toate R-modulele au C.P.S.S.D.*;
3) *Toate R-modulele au P.S.S.D.*;
4) *Toate R-modulele proiective au P.S.S.D.*;
5) *Toate R-modulele au C.P.I.S.D.*;
6) *Toate R-modulele au P.I.S.D.*;
7) *Toate R-modulele injective au P.I.S.D.*;
8) *Toate R-modulele injective au C.P.I.S.D.*;
9) *Toate R-modulele injective au P.S.S.D.*;
10) *Toate R-modulele injective au C.P.S.S.D.*;
11) *R este ereditar stâng*;
12) *Pentru orice R-modul M, S_M este o latice completă*;
13) *Pentru orice R-modul M, S_M este o latice*;
14) *Pentru orice R-modul injectiv M, S_M este o latice completă*;
15) *Pentru orice R-modul injectiv M, S_M este o latice*;
16) *Orice R-modul injectiv M este*:

a) *fără-torsiune şi pentru orice sumand direct idecompozabil A, al lui M, End(A) este un inel cu diviziune*,

sau:

b) *de torsiune, şi orice sumand direct idecompozabil al lui M este total invariant în M*.

***Demonstraţie*:** Din (1.2.1.6) rezultă echivalenţa afirmaţiilor: 1), 5), 6) şi 7). Din (3.1.3.4) obţinem echivalenţa afirmaţiilor 5) şi 12). Din (4.1.7) rezultă echivalenţa afirmaţiilor: 1), 2), 3) şi 4). Din (3.1.3.8) obţinem echivalenţa afirmaţiilor: 7), 9) şi 11). Din (1.2.2.2) şi (4.1.15) obţinem că 7) este echivalent cu 8) care este echivalent cu 16). Acum teorema (4.1.14) completează demonstraţia. □

În finalul acestui subcapitol vom vedea în ce condiţii inelul:

E=End(M),

al endomorfismelor R-modulului M, are P.S.S.D.. Pentru aceasta, mai întâi, vom demonstra următorul rezultat tehnic:

Lema 4.1.17: *Dacă π_1, π_2 şi π sunt trei endomorfisme idempotente, ale R-modulului M, astfel încât*:

$\pi_1 M+\pi_2 M=\pi M$,

atunci:

$\pi_1 E+\pi_2 E=\pi E$,

unde:

$E=End(M)$.

***Demonstraţie*:** Mai întâi observăm că, pentru orice idempotent $\alpha\in E$,

$\alpha(M)=(\alpha E)M$.

Deoarece:

$\pi_1 M+\pi_2 M=\pi M$,

rezultă că $\pi_1 M\subseteq\pi M$ şi $\pi_2 M\subseteq\pi M$. Atunci $(\pi_1 E)M\subseteq(\pi E)M$ şi $(\pi_2 E)M\subseteq(\pi E)M$. Rezultă că $\pi_1 E\subseteq\pi E$ şi $\pi_2 E\subseteq\pi E$; aşadar $\pi_1 E+\pi_2 E\subseteq\pi E$. (i) Deoarece:

$(\pi_1 E)M+(\pi_2 E)M=(\pi E)M$,

rezultă că $\pi E\subseteq\pi_1 E+\pi_2 E$. (ii) Din incluziunile (i) şi (ii) obţinem egalitatea cerută. □

Teorema 4.1.18: *R-modulul M are P.S.S.D. dacă şi numai dacă au loc următoarele afirmaţii*:

1) *E=End(M) are P.S.S.D., ca E-modul drept*,

și:

2) *pentru orice idempotenţi π şi ρ, din E*,

$\pi M+\rho M=(\pi E+\rho E)M$.

***Demonstraţie*:** Presupunem că M are P.S.S.D.. Atunci, pentru orice π_1 şi π_2 - idempotenţi în E, există π - idempotent în E, astfel încât:

$\pi_1 M+\pi_2 M=\pi M$.

Atunci, conform cu (4.1.17),

$\pi_1 E+\pi_2 E=\pi E$

și:

$\pi_1 M+\pi_2 M=\pi M=(\pi E)M=(\pi_1 E+\pi_2 E)M$.

Reciproc, presupunem că au loc afirmaţiile 1) şi 2) şi fie T şi S doi sumanzi direcţi ai lui M. Dacă:

$\pi_1 : M\rightarrow T$ şi $\pi_2 : M\rightarrow S$

sunt proiecţiile canonice ale lui M pe T, respectiv S, atunci $\pi_1 E$ şi $\pi_2 E$ sunt sumanzi direcţi în E. Conform ipotezei, există un idempotent $\pi\in E$ astfel încât:

$\pi_1 E+\pi_2 E=\pi E$.

Atunci:

$\pi M=(\pi E)M=(\pi_1 E+\pi_2 E)M=\pi_1 M+\pi_2 M=T+S$

este un sumand direct în M. Aşadar, R-modulul M are P.S.S.D.. □

Pentru inele cu P.S.S.D. avem:

Propoziţia 4.1.19: *Dacă inelul R are P.S.S.D., ca R-modul drept, atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1. ***1)*** *Pentru orice idempotent $e \in R$ şi orice $r \in (1-e)Re$, idealul drept rR este proiectiv*;
2. ***2)*** *Pentru orice idempotent $e \in R$ şi orice $r, s \in (1-e)Re$,*

$$rR+sR=(r+s)R \oplus L,$$

unde L este un sumand direct în R, cu proprietatea că:

$$rL=sL=0.$$

***Demonstraţie*: 1)** Observăm că în acest caz:

$$R=End_R(R_R).$$

Dacă:

$$e=e^2 \in R$$

şi $r \in (1-e)Re$, atunci:

$$r^2=0$$

(verificarea este imediată) şi există o descompunere directă, a lui R, de forma:

$$R=I \oplus J,$$

cu:

$$rR=rI \subseteq J \quad \text{şi} \quad rJ=0.$$

Conform ipotezei şi lui (4.1.5)1), rI este un sumand direct în J. Dacă:

$$R=I \oplus rI \oplus K,$$

unde K este un sumand direct în J, cu proprietatea că:

$$rK=0,$$

atunci:

$$rR=rI$$

este un sumand direct în R. Rezultă că rR este un ideal proiectiv al lui R.

2) Conform celor demonstrate la punctul 1), pentru orice $e \in R$ şi orice $r, s \in (1-e)Re$, idealele rR şi sR sunt sumanzi direcţi în R. Dar, $r+s \in (1-e)Re$ (verificarea este imediată!) şi:

$$r \cdot s=s \cdot r=0; \qquad (*)$$

deci (r+s)R este (şi el) un sumand direct în R, conţinut în sumandul direct rR+sR. Rezultă că:

$$rR+sR=(r+s)R \oplus L, \qquad (**)$$

unde L este un sumand direct în R. Din relaţiile (∗) şi (∗∗) obţinem că:

$$rL=sL=0. \ \square$$

Fie M şi N două R-module. Notând cu $S_M(N)$ - M-soclul lui N, adică suma tuturor imaginilor omomorfice ale lui M, în N - vezi Secţiunea 1.2.8, din (4.1.19), (1.2.8.11) şi (1.2.8.12) obţinem:

Corolarul 4.1.20: *Fie M un R-modul. Dacă inelul*:

$E=End_R(M)$

are P.S.S.D., ca E-modul drept, atunci au loc următoarele afirmaţii:

1) *Pentru orice*:

$\pi=\pi^2\in E$

şi orice $\varepsilon\in(1-\pi)E\pi$, $S_M(\ker\varepsilon)$ *este un sumand direct în M*.

2) *Pentru orice*:

$\pi=\pi^2\in E$

şi orice $\sigma,\ \tau\in(1-\pi)E\pi$,

$\sigma E+\tau E=(\sigma+\tau)E\oplus L$,

unde L este un sumand direct în E, cu proprietatea că:

$\sigma L=\tau L=0$. □

4.2. GRUPURI ABELIENE CU P.S.S.D.

În acest subcapitol vom studia câteva clase de grupuri abeliene cu P.S.S.D.. Mai întâi vom arăta că există anumite clase de grupuri abeliene care dacă au P.I.S.D. au şi P.S.S.D.. În acest sens avem:

Propoziţia 4.2.1: *Dacă G este un grup abelian cu P.I.S.D., atunci, în oricare din următoarele cazuri, G are (şi) P.S.S.D.*:

1) *G este un p-grup care este redus sau divizibil*;
2) *G este un grup de torsiune, ale cărui p-componente satisfac la condiţiile de la punctul precedent*;
3) *G este un grup divizibil*;
4) *G este un grup fără-torsiune, de forma*:

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i, \qquad (83)$$

unde:

- *pentru orice* $i\in I$, G_i *este un grup (redus) de rang unu*;
- *pentru orice* $i_1, i_2\in I$, $t(G_{i_1})$ *şi* $t(G_{i_2})$) *sunt tipuri incomparabile*;

5) *G este un grup mixt scindabil, de forma*:

$$G=D\oplus T, \qquad (84)$$

unde D este divizibil, fără-torsiune, iar T este redus, de torsiune.

***Demonstraţie*:** **1)** Fie G un p-grup cu P.I.S.D., care satisface la condiţiile din enunţ. Atunci, conform cu (2.1.2.2), avem următoarele cazuri:

Cazul 1: Există un $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq 2$, astfel încât:

$G=\mathbf{Z}(p^n)$ sau $G=\mathbf{Z}(p^\infty)$.

În acest caz G are, în mod trivial, P.S.S.D., deoarece este idecompozabil.

Cazul 2: Există un cardinal m_p astfel încât:

$G=\oplus_{m_p}\mathbf{Z}(p)$.

Atunci G este un p-grup elementar şi suma oricăror doi sumanzi direcţi ai lui G este tot un sumand direct (în G), deoarece, în acest caz, orice subgrup al lui G este sumand direct.

2) Afirmaţia din enunţ rezultă din cele demonstrate la punctul 1) şi din (4.1.4).

3) Conform cu (2.1.3.5), un grup divizibil G are P.I.S.D. dacă şi numai dacă:

$G=\bigoplus_{p\in P_1}\mathbf{Z}(p^\infty)$ sau $G=\bigoplus_{r_0}\mathbf{Q}$,

unde:

- P_1 este o submulţime a mulţimii **P** a tuturor numerelor prime,

iar:

- $r_0=r_0(G)$ este rangul fără-torsiune al lui G.

În primul caz G satisface la condiţiile de la punctul 2), iar în cazul al doilea G este un spaţiu vectorial peste **Q**. În ambele cazuri G are P.S.S.D..

***Altfel*:** Putem aplica (4.2.1.1)2).

4) Dacă G este un grup ca şi în enunţ, atunci, pentru orice $i\in I$, G_i este un grup idecompozabil şi total invariant în G. Deci, în acest caz, conform cu (4.1.3), rezultă că G are P.S.S.D..

5) Fie G un grup de forma (84). Atunci, conform celor precizate la punctele 2), respectiv 3), D şi T au (fiecare) P.S.S.D.. Deoarece acestea sunt total invariante în G, şi în acest caz (4.1.3) completează demonstraţia. □

Din (4.2.1) rezultă că în anumite cazuri P.I.S.D. implică P.S.S.D.. Aceasta nu este, însă, întotdeauna adevărat, adică există grupuri abeliene cu P.I.S.D. şi care nu au P.S.S.D.. În acest context avem (şi) următorul rezultat:

Observaţia 4.2.2: *Dacă G este un grup fără-torsiune, complet decompozabil, care satisface la condiţiile de la (1.1.11), atunci G nu are P.S.S.D..*

***Demonstraţie*:** Fie G un grup fără-torsiune, complet decompozabil, cu P.I.S.D. şi care satisface la (1.1.11). Atunci:

$G=H\oplus(\bigoplus_{i\in I}X_i)$,

unde:

- H este un grup fără-torsiune, omogen, complet decompozabil, de rang finit;
- pentru orice $i \in I$, X_i are rangul unu; pentru orice $i, j \in I$, $i \neq j$, $t(X_i)$ şi $t(X_j)$ sunt incomparabile şi, pentru orice $i \in I$, $t(H) < t(X_i)$.

În aceste condiţii, pentru orice $i \in I$, conform cu [42, §85], fiecare sumand direct de rang unu al lui H este izomorf cu un subgrup propriu al lui X_i. Aşadar, dacă Y este un sumand direct în H, pentru orice $i \in I$, conform cu (4.1.5)1), $Y \oplus X_i$ nu are P.S.S.D. şi, conform lui (4.1.1), nici G nu are P.S.S.D.. □

4.2.1. Grupuri de torsiune

Înainte de a trece la determinarea structurii grupurilor abeliene cu P.S.S.D. se impun câteva observaţii:

Observaţiile 4.2.1.1:* *1) *Dacă A este un subgrup al grupului B, care nu este summand direct în B, atunci grupul*:

$$G = A \oplus B$$

nu are P.S.S.D.. În particular, dacă B este idecompozabil, atunci pentru orice subgrup propriu A al lui B, grupul:

$$G = A \oplus B$$

nu are P.S.S.D..

2) *Orice grup (abelian) divizibil are P.S.S.D..*

***Demonstraţie*: 1)** Fie A, B şi G ca şi în enunţ şi fie:

$$i : A \to B$$

morfismul de incluziune. Conform lui (4.1.5)1),

$$A = i(A)$$

este un sumand direct în B - contradicţie cu ipoteza.

2) Deoarece inelul **Z** este ereditar, enunţul rezultă din (4.1.11). □

Observaţii 4.2.1.2:* *1) *Pentru orice $m, n \in \mathbf{N}^*$, cu proprietatea că $m+n \geq 3$, grupul $\mathbf{Z}(p^m) \oplus \mathbf{Z}(p^n)$ nu are P.S.S.D..*

2) *Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, grupul $\mathbf{Z}(p^n) \oplus \mathbf{Z}(p^\infty)$ nu are P.S.S.D..*

***Demonstraţie*: 1)** Pentru orice $m, n \in \mathbf{N}^*$, cu proprietatea că $m+n \geq 3$, există morfisme nenule de la $\mathbf{Z}(p^m)$ la $\mathbf{Z}(p^n)$, sau vice-versa, care nu sunt epimofisme. Acum, putem aplica (4.1.5)2).

***Altfel*:** Putem aplica (4.2.1.2)1).

2) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, există morfisme nenule:

$$f : \mathbf{Z}(p^n) \to \mathbf{Z}(p^\infty),$$

care nu sunt epimorfisme. Iarăşi aplicăm (4.1.5)2).

***Altfel*:** Putem aplica (4.2.1.1)1). □

Pentru p-grupurile cu P.S.S.D. avem:

Teorema 4.2.1.3: *Următoarele afirmaţii sunt echivalente, pentru un p-grup G*:

1) *G are P.S.S.D.*;

2) ***a)*** *G este idecompozabil*,

sau

b) *pG=0*,

sau

c) *G este divizibil*.

***Demonstraţie*:** **1)** implică **2) a)** Dacă G este idecompozabil, nu avem ce demonstra.

b) Mai întâi demonstrăm că, pentru orice $a\in G[p]$, avem:

$h_p(a)=0$ sau $h_p(a)=\infty$.

Presupunem că există un $a\in G[p]$ astfel încât:

$h_p(a)=k$,

unde $k\in\mathbf{N}$ şi $0<k<\infty$. Rezultă că $a\in p^kG$; deci există un $b\in G$ astfel încât:

$a=p^k\cdot b$ şi $p\cdot a=0$.

Aşadar:

$p^{k+1}\cdot b=0$ şi $o(b)=p^{k+1}$.

Atunci, conform cu [23, 4.3.2], $\langle b\rangle$ este un sumand direct în G; deci:

$G=\langle b\rangle\oplus G_1$

şi $\langle a\rangle\subseteq\langle b\rangle$. Acum, presupunem că, pentru orice $g\in G_1[p]$, $\langle g\rangle$ este un sumand direct în G_1. Atunci $G_1[p]$ este un sumand direct în G_1; aşadar:

$G_1=G_1[p]\oplus F_1$.

Dar:

$F_1[p]=F_1\cap G_1[p]=0$.

Rezultă că:

$F_1=0$, $G_1=G_1[p]$

şi, abstraţie făcând de un izomorfism,

$G=\mathbf{Z}(p^{k+1})\oplus(\bigoplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))$,

unde m_p un cardinal oarecare. Considerăm:

$S=\mathbf{Z}(p^{k+1})\oplus\mathbf{Z}(p)$

un sumand direct în G. Deoarece $k\geq 1$, conform cu (4.2.1.2)1), S nu are P.S.S.D. şi, atunci, nici G nu mai are această proprietate, contradicţie cu ipoteza. Rezultă că există un $g\in G_1[p]$ astfel încât $\langle g\rangle$ nu este un sumand direct în G_1. Alegem un astfel de $g\in G_1[p]$. Atunci:

$o(b+g)=p^{k+1}$

şi $<b+g>$ este un sumand direct în G; deci:

$G=<b+g>\oplus H.$

Se poate demonstra uşor că:

$<b>\cap<b+g>=<pb>.$

În acest caz, conform alegerii lui g,

$<b>+<b+g>=<b>\oplus<g>$

nu este un sumand direct în G; aşadar G nu are P.S.S.D. - iarăşi am obţinut o contradicţie cu ipoteza. Rezultă că presupunerea iniţială este falsă şi, într-adevăr, pentru orice $a\in G[p]$, avem:

$h_p(a)=0$ sau $h_p(a)=\infty.$

Fie U mulţimea sumanzilor direcţi p-mărginiţi ai lui G şi $\{A_1,A_2,\dots,A_n,\dots\}$ o mulţime total ordonată a lui U. Atunci:

$$A=<\bigcup_{i\geq 1} A_i>$$

este un subgrup al lui G şi, conform lui [65, p. 151], A este un sumand direct în G. Conform Lemei lui Zorn, există în U un element maximal B astfel încât:

$G=B\oplus C.$

Fie $g\in C[p]$ un element oarecare. Dacă:

$h_p(g)=0,$

atunci:

$C=<g>\oplus F$

şi $B\oplus<g>\in U$, ceea ce contrazice maximalitatea lui B. Deci, conform celor demonstrate mai sus, pentru orice $g\in C[p]$, avem că:

$h_p(g)=\infty.$

Dar, atunci, abstracţie făcând de un izomorfism, C este o sumă directă de exemplare de $\mathbf{Z}(p^\infty)$. Aşadar, sumanzii direcţi ai lui G sunt sau p-mărginiţi, sau izomorfi cu $\bigoplus_{n_p}\mathbf{Z}(p^\infty)$, unde n_p este un cardinal oarecare. Din (4.2.1.2)2) rezultă că:

(G este redus, caz în care $pG=0$) sau (G este divizibil).

2) implică **1)** Presupunem că p-grupul G satisface la una din condiţiile a), b) sau c). Dacă G este idecompozabil, atunci el are, în mod trivial, P.S.S.D.. Dacă:

$pG=0,$

atunci G este un p-grup elementar şi el are P.S.S.D.. Dacă G este divizibil, atunci (4.2.1.1)2) completează demonstraţia. □

Din (4.2.1.3) obţinem structura p-grupurilor abeliene cu P.S.S.D..

Corolarul 4.2.1.4: *Fie G un p-grup abelian. Atunci G are P.S.S.D. dacă şi numai dacă*:

1) $G=\mathbf{Z}(p^n)$, (85)

sau:

2) $G=(\bigoplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))$, (86)

sau:

3) $G=(\bigoplus_{n_p}\mathbf{Z}(p^\infty))$ (87)

unde:

- $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq 2$;
- m_p *şi* n_p *sunt cardinale oarecari*. □

Din (4.1.4) şi (4.2.1.4) obţinem structura grupurilor de torsiune cu P.S.S.D..

Corolarul 4.2.1.5: *Fie G un grup abelian de torsiune. Atunci G are P.S.S.D. dacă şi numai dacă*:

$$G=(\bigoplus_{p\in P_1} G_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_2} B_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_3} C_p), \qquad (88)$$

unde:

- P_1, P_2 *şi* P_3 *sunt submulţimi ale mulţimii* **P** *a tuturor numerelor prime, astfel încât*:

$$P_1\cap P_2=P_2\cap P_3=P_3\cap P_1=\varnothing;$$

- *pentru orice* $p\in P_1$, G_p *este un p-grup divizibil*;
- *pentru orice* $p\in P_2$, B_p *este un p-grup elementar*;
- *pentru orice* $p\in P_3$, C_p *este un p-grup redus, idecompozabil, neelementar*. □

4.2.2. Grupuri fără-torsiune

Acum vom trece la studiul grupurilor fără-torsiune cu P.S.S.D.. Începem cu:

Lema 4.2.2.1: *Dacă H şi K sunt grupuri reduse, idecompozabile şi fără-torsiune, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Grupul*:

$$G=H\oplus K$$

are P.S.S.D.;

2) $Hom(H,K)=Hom(K,H)=0$.

***Demonstraţie*: 1)** implică **2)** Presupunem că G are P.S.S.D. şi că există un morfism:

$$0\neq f : H \to K.$$

Deoarece K este redus, există un număr prim p astfel încât $pK\neq K$. Dacă p este un astfel de număr şi g este înmulţirea cu p în K, atunci:

$g \circ f : H \rightarrow K$

nu este epimorfism. Acum (4.1.5)2) arată că:

Hom(H,K)=0.

Analog se obţine că:

Hom(K,H)=0.

2) implică **1)** Dacă:

Hom(H,K)=Hom(K,H)=0,

atunci G este o sumă directă de doi sumanzi direcţi total invarianţi, fiecare având P.S.S.D., iar (4.1.3) completează această demonstraţie. □

O consecinţă imediată a lui (4.2.2.1) este:

Corolarul 4.2.2.2: *Dacă H este un grup fără-torsiune, atunci grupurile H⊕H şi* ***Z****⊕H nu au P.S.S.D..* □

Principalul rezultat al acestei secţiuni este următorul:

Teorema 4.2.2.3: *Dacă G este un grup fără-torsiune, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *G are D.S.S.P.*;

2) *G are una din următoarele forme*:

a) *G este divizibil*, (89)

sau:

b) *G este redus şi idecompozabil*, (90)

sau:

c) $G=\bigoplus_{i\in I} G_i$, (91)

unde:

- *pentru fiecare* $i\in I$, G_i *este un grup redus, idecompozabil*;
- *pentru fiecare* $i_1, i_2\in I$, $i_1\neq i_2$,

$$Hom(G_{i_1}, G_{i_2})=Hom(G_{i_2}, G_{i_1})=0.$$

***Demonstraţie*:** **1)** implică **2)** Fie G un grup fără-torsiune, cu P.S.S.D.. Din (4.2.1.1)1) and (4.2.3.1) rezultă că dacă H este un group redus, atunci **Q**⊕H nu este un sumand direct în G. Deci G este sau divizibil, sau redus. Dacă G este sau divizibil, sau redus idecompozabil, atunci demonstraţia este gata. Dacă:

$$G=\bigoplus_{i\in I} G_i,$$

unde, pentru orice $i\in I$, G_i este un grup redus idecompozabil, atunci (4.2.2.1) completează demonstraţia.

2) implică **1)** Fie G un grup care satisface una din condiţiile de la punctul 2). Dacă G este divizibil, atunci (4.2.1.1)2) arată că el are P.S.S.D.. Dacă G este un grup redus, idecompozabil, atunci el are, în mod trivial, P.S.S.D.. Dacă G este de forma (91), atunci, pentru orice $i \in I$, G_i are P.S.S.D. şi este total invariant în G, iar din (4.1.3) rezultă că G are P.S.S.D.. □

Din (4.2.2.3) obţinem structura grupurilor fără-torsiune, complet decompozabile.

Corolarul 4.2.2.4: *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru orice grup G, fără-torsiune şi complet decompozabil*:

1) *G are P.S.S.D.*;

2) *G are una din următoarele forme*:

a) *G este divizibil*, (89)

sau:

b) *G este redus (idecompozabil) de rang unu*, (92)

sau:

c) $G=\bigoplus_{i\in I} G_i$, (93)

unde:

- *pentru orice* $i \in I$, G_i *este un grup redus (idecompozabil), de rang unu*;
- *pentru orice* $i_1, i_2 \in I$, $t(G_{i_1})$ *şi* $t(G_{i_2})$) *sunt tipuri incomparabile*.

Demonstraţie**:** Pentru orice H şi K grupuri reduse, fără-torsiune, de rang unu,

Hom(H,K)=Hom(K,H)=0

are loc dacă şi numai dacă t(A) şi t(B) sunt tipuri incomparabile. Deci, putem aplica (4.2.2.3). □

4.2.3. Grupuri mixte scindabile

În această ultimă secţiune vom studia grupurile (abeliene) mixte scindabile, cu P.S.S.D.. Începem cu:

Lema 4.2.3.1: *Fie A un grup abelian şi*:

$G=D\oplus A$,

cu D - divizibil şi fără-torsiune. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) *G are P.S.S.D.*;

2) *A este de forma (88).*

Demonstraţie**: 1)** implică **2)** Presupunem că G are P.S.S.D.. Atunci **Q**⊕A are această proprietate. Considerăm un sistem maximal independent $\{x_i\}_{i\in I}$, format din elemente de ordin infinit în A şi fie:

$B=\bigoplus_{i\in I} <x_i>$.

Atunci orice morfism de grupuri:

$f : A \to \mathbf{Q}$

induce un morfism:

$g : B \to \mathbf{Q}$

şi reciproc. Dar, pentru orice $i \in I$,

$<x_i> \cong \mathbf{Z}$;

fie:

$f_i : <x_i> \to \mathbf{Z}$

un izomorfism. Atunci, pentru orice $i \in I$, există un morfism:

$h_i : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$

astfel încât:

$h_i \circ f_i = g_i$,

unde:

$g_i : <x_i> \to \mathbf{Q}$

este un morfism de grupuri şi:

$\mathrm{Im} g_i = \mathrm{Im} h_i$.

Deoarece:

$\mathrm{Im} g = \sum_{i \in I} \mathrm{Im}\, g_i$,

rezultă că există un morfism:

$g^* : B \to \mathbf{Q}$

astfel încât $\mathrm{Im} g^* \subset Q$. Atunci nici morfismul:

$f^* : A \to \mathbf{Q}$,

indus de g^*, nu este epimorfism, contradicţie cu (4.1.5)1). Rezultă că A nu are elemente de ordin infinit; deci A este de torsiune. Deoarece A are P.S.S.D., rezultă că el are forma (88).

2) implică **1)** Dacă A este un grup de forma (88), atunci el are P.S.S.D.. În acest caz, deoarece grupul G se poate scrie ca suma directă a două subgrupuri total invariante (în G) şi având fiecare P.S.S.D., (4.1.3) completează demonstraţia. □

Trecem acum la grupurile mixte, reduse, scindabile.

Propoziţia 4.2.3.2: *Fie H un grup redus, fără-torsiune, idecompozabil şi:*

$G = H \oplus \mathbf{Z}(p^n)$,

unde p este un număr prim şi $n \in \mathbf{N}^*$. *Atunci au loc următorele afirmaţii:*

1) *Dacă H nu este p-divizibil, atunci:*

G are P.S.S.D. dacă şi numai dacă n=1.

2) *Dacă H este p-divizibil, atunci G are P.S.S.D., pentru orice $n\geq 1$. Mai mult, dacă $n\geq 2$, atunci*:

G are P.S.S.D. exact dacă H este p-divizibil.

***Demonstraţie*: 1)** Presupunem că H nu este p-divizibil. Desigur că dacă:

$$n=1,$$

atunci:

$$G=H\oplus \mathbf{Z}(p)$$

are P.S.S.D..

Reciproc, presupunem că $n\geq 2$ şi:

$$G=H\oplus \mathbf{Z}(p^n)$$

are P.S.S.D.. Considerăm:

$$f : H \to \mathbf{Z}(p^n)$$

un morfism oarecare de grupuri şi fie:

$$\pi : H \to H/p^nH$$

proiecţia canonică a lui H pe grupul factor H/p^nH. Conform ipotezei, deoarece:

$$p^nH=\ker\pi\subseteq\ker f,$$

există un morfism nenul:

$$h : H/p^nH \to \mathbf{Z}(p^n)$$

astfel încât:

$$f=h\circ\pi.$$

Pe de altă parte,

$$p^n(H/p^nH)=0,$$

deci H/p^nH este un p-grup mărginit, adică el este izomorf cu o sumă directă de p-grupuri ciclice, de ordin cel mult egal cu p^n; fie:

$$H/p^nH\cong\bigoplus_{i\in I}\mathbf{Z}(p^{n_i}),$$

unde, pentru orice $i\in I$, $n_i\leq n$. Atunci există un morfism:

$$k : \bigoplus_{i\in I}\mathbf{Z}(p^{n_i}) \to \mathbf{Z}(p^n)$$

astfel încât:

$$k=h\circ g,$$

unde:

$$g : \bigoplus_{i\in I}\mathbf{Z}(p^{n_i}) \to H/p^nH$$

este un izomorfism, vezi figura (94)

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & \mathbf{Z}(p^n) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow_{h} & \\ H/p^nH & & \nearrow_{k} \\ {\scriptstyle g}\uparrow & & \\ \bigoplus_{i\in I}\mathbf{Z}(p^{n_i}). & & \end{array} \qquad (94)$$

Conform ipotezei şi lui (4.1.5)2)b), f este epimorfism. Rezultă că şi h este tot un epimorfism. Atunci:

$$\mathbf{Z}(p^n)=\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}(h\cdot\pi)=\mathrm{Im}h=\mathrm{Im}(h\cdot g)=\mathrm{Im}k=\sum_{i\in I}\mathrm{Im}\,k_i,$$

unde, pentru orice $i\in I$,

$$k_i:\mathbf{Z}(p^{n_i})\to\mathbf{Z}(p^n)$$

este un morfism de grupuri. Considerăm $m\in\mathbf{N}$, cu proprietatea că $2\leq m\leq n-1$ şi fie:

$$B=\langle p^m\rangle\subset\mathbf{Z}(p^n).$$

Dacă, pentru orice $i\in I$,

$$k_i(1)=p^m,$$

atunci, pentru orice $i\in I$, $\mathrm{Im}k_i\subseteq B$. În acest caz:

$$\mathbf{Z}(p^n)=\mathrm{Im}f=\sum_{i\in I}\mathrm{Im}\,k_i\subseteq B\subset\mathbf{Z}(p^n),$$

ceea ce este imposibil. Rezultă că:

$$n=1.$$

2) Dacă H este p-divizibil, atunci G este o sumă directă de doi sumanzi direcţi total invarianţi, fiecare având P.S.S.D.. Din (4.1.3) rezultă că G are P.S.S.D.. Acum, presupunem că $n\geq 2$ şi G are P.S.S.D.. Conform celor demonstrate la punctul 1), dacă H nu este p-divizibil, atunci:

$$n=1$$

- ceea ce contrazice ipoteza. Aşadar, în acest caz, H este p-divizibil. □

Corolarul 4.2.3.3: *Fie H un grup redus, fără-torsiune, idecompozabil, B un p-grup (redus) p^n-mărginit şi*:

$$G=H\oplus B,$$

unde p este un număr prim şi $n\in\mathbf{N}^*$. Atunci au loc următorele afirmaţii:

1) *Dacă H nu este p-divizibil, atunci*:

G are P.S.S.D. dacă şi numai dacă B este elementar.

2) *Dacă H este p-divizibil, atunci G are P.S.S.D. pentru orice grup B care este sau idecompozabil sau elementar (deci, B este de forma (85) sau de forma (86)). Mai mult, dacă $n\geq 2$, atunci*:

G are P.S.S.D. exact dacă H este p-divizibil şi B este idecompozabil.

***Demonstraţie*: 1)** Presupunem că H nu este p-divizibil şi că G are P.S.S.D.. Atunci, conform lui (4.1.1), B are P.S.S.D.. Din (4.1.2.4) rezultă că:

$B=\mathbf{Z}(p^n)$ sau $B=(\bigoplus_{m_p}\mathbf{Z}(p))$,

unde $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq 2$, iar m_p este un cardinal oarecare. Acum (4.2.3.2)1) arată că B este elementar.

Reciproc, presupunem că B este un p-grup elementar şi fie T şi S doi sumanzi direcţi ai lui G. Deoarece, B este total invariant în G, rezultă că:

$T=K\oplus U$ sau $T=U$,

iar:

$S=L\oplus V$ sau $S=V$,

unde U şi V sunt sumanzi direcţi în B, iar K şi L sunt izomorfi cu H. Rezultă că T+S este un sumand direct în G şi, astfel, G are P.S.S.D..

2) Presupunem că H este p-divizibil. Atunci G este o sumă directă de sumanzi direcţi total invarianţi. Deci G are P.S.S.D. dacă şi numai dacă B are această proprietate. Acum (4.2.1.4) completează demonstraţia. Presupunem că $n\geq 2$. Atunci, conform ipotezei, lui (4.2.1.4) şi lui (4.2.3.2)2), G are P.S.S.D. dacă şi numai dacă:

$B=\mathbf{Z}(p^n)$

şi H este p-divizibil. □

Rezultatul de la (4.2.3.3) îl putem generaliza astfel:

Corolarul 4.2.3.4: *Fie*,

$$H=\bigoplus_{i\in I} H_i$$

un grup redus, fără-torsiune, cu proprietatea că, pentru orice $i\in I$, H_i este idecompozabil şi fie:

$$B=\bigoplus_{p\in P'} B_p$$

un grup redus, de torsiune, descompus în p-componentele sale, unde P' este o mulţime de numere prime. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) *Grupul*:

$$G=H\oplus B$$

are P.S.S.D.;

2) *Au loc următoarele două afirmaţii*:

a) *Pentru orice* $p \in P'$,

i) B_p *este de forma (85) şi pentru orice* $i \in I$, H_i *este p-divizibil*,

sau:

ii) B_p *este de forma (86).*

b) *Pentru orice* $i_1, i_2 \in I$, $i_1 \neq i_2$,

$$Hom(H_{i_1}, H_{i_2}) = Hom(H_{i_2}, H_{i_1}) = 0.$$

***Demonstraţie*: 1)** implică **2)** Fie G un grup ca şi în enunţ, cu P.S.S.D.. Atunci H, B şi, pentru orice $p \in P'$ şi pentru orice $i \in I$, $H_i \oplus B_p$ au (fiecare) P.S.S.D.. Din (4.2.2.3) şi (4.2.3.3) rezultă că are loc una din condiţiile a) sau b).

2) implică **1)** Presupunem că are loc una din condiţiile a) sau b). Atunci:

$$G = H \oplus (\bigoplus_{p \in P_2} B_p) \oplus (\bigoplus_{p \in P_3} C_p), \qquad (95)$$

unde:

- P_2 şi P_3 sunt submulţimi disjuncte ale mulţimii P', cu proprietatea că:
  $P_2 \cup P_3 = P'$;
- pentru orice $p \in P_2$, B_p este un p-grup elementar; pentru orice $p \in P_3$, C_p este un p-grup redus, indecompozabil (neelementar).

Fie:

$$K = H \oplus (\bigoplus_{p \in P_2} B_p) \quad \text{şi} \quad L = \bigoplus_{p \in P_3} B_p.$$

Orice descompunere directă a lui K este de forma:

$$K = H' \oplus (\bigoplus_{p \in P_2} B_p),$$

unde H' este izomorf cu H şi orice sumand direct T al lui K este de forma:

$$T = E \oplus F,$$

unde E este izomorf cu un sumand direct al lui H şi F este un subgrup în $\bigoplus_{p \in P_2} B_p$.

Deoarece, pentru orice morfism:

$$f : H \to \bigoplus_{p \in P_2} B_p$$

Imf este un sumand direct, rezultă că suma oricăror doi sumanzi direcţi ai lui K este tot un sumand direct în K. Pe de altă parte, sumanzii K şi L sunt total invarianţi în G şi L are P.S.S.P. (conform lui (4.2.1.5)). Acum, iarăşi, (4.1.3) completează demonstraţia. □

Pentru grupurile mixte, scindabile, nereduse, avem următorul rezultat:

Lema 4.2.3.5: *Fie H un grup redus, fără-torsiune, idecompozabil şi*:

$$G=H\oplus\mathbf{Z}(p^{\infty}),$$

unde p este un număr prim. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) *G are P.S.S.D.*;

2) *H este p-divizibil*.

***Demonstraţie*: 1)** implică **2)** Presupunem că G are P.S.S.D., H nu este p-divizibil şi

$$\mathbf{Z}(p^{\infty})=<c_1,c_2,\ldots,c_n,\ldots>,$$

unde:

$$p\cdot c_1=0, \qquad p\cdot c_2=c_1, \qquad \ldots, \qquad p\cdot c_n=c_{n-1}, \qquad \ldots \quad .$$

Fie $n\in\mathbf{N}^*$ şi considerăm:

$$f : H \to \mathbf{Z}(p^n)$$

un morfism oarecare de grupuri. Dacă:

$$g : \mathbf{Z}(p^n) \to \mathbf{Z}(p^{\infty})$$

este un morfism cu:

$$g(1)=c_n,$$

atunci:

$$g\circ f : H \to \mathbf{Z}(p^{\infty})$$

este un morfism, care nu este epimorfism. Deci, conform lui (4.1.5)2), G nu are P.S.S.D. - contradicţie cu ipoteza. Aşadar, dacă G are P.S.S.D., atunci H este p-divizibil.

2) implică **1)** Se poate demonstra uşor că orice sumand direct propriu al lui G este sau $\mathbf{Z}(p^{\infty})$ sau izomorf cu H. Deci, fie:

$$G=H\oplus\mathbf{Z}(p^{\infty})=K\oplus\mathbf{Z}(p^{\infty})$$

două descompuneri directe ale ale lui G. Atunci:

$$H+K=H\oplus[\mathbf{Z}(p^{\infty})\cap(H+K)]=K\oplus[\mathbf{Z}(p^{\infty})\cap(H+K)]$$

şi $H/(H\cap K)$ este izomorf cu $\mathbf{Z}(p^{\infty})\cap(H+K)$, vezi [92]. Deoarece $H/(H\cap K)$ este p-divizibil, rezultă că $\mathbf{Z}(p^{\infty})\cap(H+K)$ este $\mathbf{Z}(p^{\infty})$ sau 0. În concluzie, G are P.S.S.D.. □

Considerăm grupul:

$$G=(\bigoplus_{p\in P_1}(\bigoplus_{n_p}\mathbf{Z}(p^{\infty})))\oplus(\bigoplus_{i\in I}H_i) \qquad (96)$$

unde:

- P_1 este o submulţime de numere prime şi n_p este un cardinal oarecare,
- I este o mulţime oarecare de indici şi, pentru orice $i\in I$, H_i este un grup redus, idecompozabil şi fără-torsiune.

Deoarece sumandul direct:

$$D=\bigoplus_{p\in P_1}(\bigoplus_{n_p}\mathbf{Z}(p^{\infty}))$$

este total invariant în acest grup G, folosind (4.2.2.1) şi (4.2.3.5) obţinem:

Corolarul 4.2.3.6: *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru orice grup G de forma (96)*:

1) *G are P.S.S.D.*;

2) *Au loc următoarele două afirmaţii*:

a) *pentru orice $i\in I$ şi orice $p\in P_1$, H_i este p-divizibil*;

şi:

b) *pentru orice $i_1, i_2\in I$, $i_1\neq i_2$,*

$$Hom(H_{i_1}, H_{i_2})=Hom(H_{i_2}, H_{i_1})=0. \square$$

Suntem acum în măsură să prezentăm structura grupurilor mixte scindabile, cu P.S.S.D..

Teorema 4.2.3.7: *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru orice grup mixt scindabil G*:

1) *G are P.S.S.D.*;

2) *G are una din următoarele forme*:

a) $G=D\oplus A$, (97)

sau:

b) $G=H\oplus A$, (98)

unde:

- *D este fără-torsiune şi divizibil*;
- *A este un grup de forma (88)*;
- *H este un grup redus, fără-torsiune de forma (90) sau de forma (91), pentru orice p-componentă neelementară a lui A orice sumand direct al lui H este p-divizibil şi pentru orice doi sumanzi direcţi, distincţi, idecompozabili T şi S ai lui H,*

$$Hom(T,S)=0.$$

***Demonstraţie*: 1)** implică **2)** Fie:

$$G=E\oplus F$$

un grup mixt scindabil, cu P.S.S.D., unde E este divizibil şi F este redus. Presupunem că:

$$E=(\oplus_{m_0}\mathbf{Q})\oplus(\bigoplus_{p\in P_1} A_p),$$

unde P_1 este o submulţime de numere prime şi pentru orice $p\in P_1$, A_p este un p-grup divizibil. Dacă $m_0\neq 0$, atunci din (4.2.3.1) rezultă că A este de forma (88) şi G este de forma (97). Dacă:

$$m_0=0,$$

atunci (4.2.3.4) şi (4.2.3.6) completează demonstraţia.
2) implică **1)** Presupunem că G este un grup care satisface una din condiţiile a) sau b) de la punctul 2). Atunci, conform lui (4.2.3.1), (4.2.3.4) şi (4.2.3.6) este suficient să demonstrăm doar că grupul:

$$G=H\oplus A$$

are P.S.S.D. dacă mulţimile P_1, P_2 şi P_3 sunt nevide. Deci considerăm un astfel de grup:

$$G=(\bigoplus_{i\in I} H_i)\oplus(\bigoplus_{p\in P_1} A_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_2} B_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_3} C_p), \qquad (99)$$

unde:

- P_1, P_2 şi P_3 sunt submulţimi nevide de numere prime, cu proprietatea că:
  $$P_1\cap P_2=P_1\cap P_3=P_2\cap P_3=\varnothing;$$
- pentru orice $p\in P_1$, A_p este un p-grup divizibil; pentru orice $p\in P_2$, B_p este un p-grup elementar;
- pentru orice $p\in P_3$, C_p este un p-grup redus, idecompozabil şi neelementar;
- pentru orice $i\in I$, H_i este un grup redus, idecompozabil, fără-torsiune şi p-divizibil, pentru orice $p\in P_1\cup P_3$; pentru orice i_1, $i_2\in I$, $i_1\neq i_2$,
  $$Hom(H_{i_1}, H_{i_2})= Hom(H_{i_2}, H_{i_1})=0.$$

Fie:

$$K=(\bigoplus_{i\in I} H_i)\oplus(\bigoplus_{p\in P_1} A_p)$$

şi fie:

$$L=(\bigoplus_{p\in P_2} B_p)\oplus(\bigoplus_{p\in P_3} C_p).$$

Atunci rezultă că, K şi L au (fiecare) P.S.S.D., conform lui (4.2.3.6), respectiv lui (4.2.1.5). Deoarece ele sunt total invariante în G şi:

$$G=K\oplus L,$$

iarăşi (4.1.3) completează demonstraţia. □

La sfârşitul acestei cărţi, ca o concluzie, remarcăm următoarele:

Observaţii 4.2.4.8: 1) a) *Există grupuri abeliene care au şi P.I.S.D. şi P.S.S.D..*
b) *Există grupuri abeliene care nu au P.I.S.D., dar au P.S.S.D..*
c) *Există grupuri abeliene care au P.I.S.D., dar nu au P.S.S.D..*
d) *Există grupuri abeliene care nu au nici P.I.S.D., nici P.S.S.D..*
2) *Pentru orice grup de torsiune, T, cu P.S.S.D., există două grupuri G_1 şi G_2 cu proprietăţile: G_1 şi G_2 au (fiecare) P.S.S.D., G_1 nu este izomorf cu G_2, dar:*

$$T(G_1)=T(G_2)=T.$$

***Demonstraţie*: 1)a)** Vezi (4.2.1).
b) Conform cu (2.1.2.2) şi (4.2.1.1)2), grupul:

$G=\mathbf{Z}(p^{\infty})\oplus\mathbf{Z}(p^{\infty})$

satisface la condiţiile din enunţ.
c) Vezi (4.2.2).
***Altfel*:** Conform cu (2.1.2.2) şi (4.2.1.2)2), grupul:

$G=\mathbf{Z}(p)\oplus\mathbf{Z}(p^{\infty})$

satisface la condiţiile din enunţ.
d) Conform cu (2.1.2.2) şi (4.2.1.2)2), grupul:

$G=\mathbf{Z}(p)\oplus\mathbf{Z}(p^{\infty})\oplus\mathbf{Z}(p^{\infty})$

satisface la condiţiile din enunţ.
2) Vezi (4.2.4.7). □

BIBLIOGRAFIE

[1] **Albrecht, U.,** *An Azumaya Theorem for a class of mixed abelian groups*, Preprint.

[2] **Albrecht, U.,** *Endomorphism rings and A-projective, torsion-free abelian groups*, Abelian Groups Theory, Lecture Notes in Math., 1006, Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg, 1983, 209-227.

[3] **Albrecht, U.,** *A note an localy A-projective groups*, Pacific J. Math., 120, 1985, 1-17.

[4] **Albrecht, U.,** *Baer's lemma and Fuchs problem 84a*, Trans. Amer. Math. Soc., 293, 1986, 565-582.

[5] **Albrecht, U.,** *Endomorphism rings of faithfully flat abelian groups of infinite rank*, Results in Math., 17, 1990, 179-201.

[6] **Albrecht, U., Goeters, H. P., Wickless, W.,** *The flat dimension of mixed groups as E-modules*, Rocky Montain J. Math., 25, 1995, 569-590.

[7] **Albrecht, U., Hausen, J.,** *Modules with the quasi-summand intersection property*, Bull. Austr. Math. Soc., 44, 1991, 189-201.

[8] **Albrecht, U., Hausen, J.,** *Mixed Abelian Groups with the Summand Intersection Property*, Lecture Notes in Pure and Applied. Math., 182, Aekker, New-York, 1996, 123-132.

[9] **Albrecht, U., Jeong, J.,** *Homomorphisms between A-projective groups and left Kasch rings*, Preprint.

[10] **Anderson, F. W., Fuller, K. R.,** *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag, 1973.

[11] **Arnold, D. M.,** *Finite Rank Torsion-Free Abelian Groups and Rings*, Lecture Note in Math., 931, Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg, 1982.

[12] **Arnold, D. M., Faticoni, T.,** *Abelian group as flat modules over their endomorphism rings*, Comm. Algebra 21(10), 1993, 3403-3423.

[13] **Arnold, D. M., Hausen, J.,** *A characterization of modules with the summand intersection property*, Comm. Algebra, 18(2), 1990, 519-528.

[14] **Arnold, D. M., Lady, E. L.,** *Endomorphism rings and direct sums of torsion-free abelian groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 211, 1975, 225-237.

[15] **Arnold, D. M., Murley, E.C.,** *Abelian groups such that Hom(A,-) preserves direct sums of copies of A,* Pacific J. Math., 56, 1975, 7-20.

[16] **Baer, R.,** *Abelian Groups that are direct summand in every containing abelian groups*, Bull. Amer. Math. Soc., 46, 1940, 800-806.

[17] **Beaumont, R. A., Pierce, R. S.,** *Torsion-free rings*, Illinois J. Math., 5, 1961, 61-98.

[18] **Botha, J. D., Gräbe, P. J.,** *On torsion-free Abelian groups whose endomorphism rings are principal ideal domain*, Comm. Algebra, 12(11), 1983, 1343-1354.

[19] **Bowmann, H., Rangaswamy, K. M.,** *Torsion-free separabile abelian groups qvasi-projective over their endomorphism rings*, Houston J. Math., 11, 1985, 147-153.

[20] Butler, M. C. R., *A class of torsion-free abelian groups of finite rank*, Proc. London Math. Soc., 15(3), 1965, 680-698.

[21] Butler, M. C. R., *On localy free torsion-free rings of finite rank*, J. London Math. Soc., 13, 1968, 297-300.

[22] Cartan, H., Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.

[23] Călugăreanu, G, *Introducere în teoria grupurilor abeliene*, Editura Expert, Cluj-Napoca, 1994.

[24] Călugăreanu, G, *Abelian groups with semi-local rings of endomorphisms*, Comm. Algebra, 30(9), 2002, 4105-4111.

[25] Chatters, A. W., Hajarnavis, C. R., *Rings with Chain Conditions*, Pitman, London, 1980.

[26] Colby, R. R., Rutter, E. A. Jr., *Generalizations of QF-3 algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 153, 1971, 371-386.

[27] Corner, A. L. S., *Every countable reduced torsion-free rings is an endomorphism ring*, Proc. London Math. Soc., 13(3), 1963, 687-710.

[28] Dlab, V., *The Frattini subgroups of Abelian Groups*, Czech. Math. J., 10, 1960, 1-16.

[29] Dobbs, D. E., *On the criteria of D. D. Anderson for invertible and flat ideals*, Cannad. Math. Bull, 29, 1986, 25-32.

[30] Dugas, M., Göbel, R., *Every cotorsion-free rings is an endomorphism ring*, Proc. London Math. Soc., 45(3), 1982, 319-336.

[31] Dugas, M., Göbel, R., *Every cotorsion-free algebra is an endomorphism algebra*, Math. Z., 181, 1982, 451-470.

[32] Dugas, M., Göbel, R., *Endomorphism rings of separable torsion-free abelian groups*, Houston J. Math., 11, 1985, 471-483.

[33] Dugas, M., Irwin, J., Khabbaz, S., *Countable rings as endomorphism rings*, Quart. J. Math., Oxford, 39(2), 1988, 201-211.

[34] Faith, C., *Lectures on Injective Modules and Quotient Rings*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 49, 1967.

[35] Faith, C., *Algebra II, Ring Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1976.

[36] Faith, C., Page, S., *"FPF Ring Theory"*, London Math. Soc., Lecture Notes Series, 88, Cambrige Univ. Press, 1984.

[37] Faticoni, T. G., Goeters, P., *Examples of torsion-free groups flat as modules over their endomorphism ring*, Comm. Algebra, 19, 1991, 1-27.

[38] Fuchs, L., *On a useful lemma for abelian groups*, Acta. Sci. Math. Szeged, 17, 1956, 134-138.

[39] Fuchs, L., *Abelian Groups*, Publ. House of Hungarian Acad. of Science, Budapest, 1958.

[40] Fuchs, L., *Notes on Abelian Groups*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sec. Math., 2, 1959, 5-23.

[41] Fuchs, L., *Infinite Abelian Groups Theory*, vol. I, Academic Press, New-York and London, Pure and Applied Mathematics, 36, 1970.

[42] Fuchs, L., *Infinite Abelian Groups Theory*, vol. II, Academic Press, New-York and London, Pure and Applied Mathematics, 36, 1973.

[43] Fuchs, L., Kertész, A., Szele, T., *Abelian groups in which every serving subgroup is a direct summand*, Publ. Math. Debrecen, 3, 1953, 95-105.

[44] Garcia, J., L., *Properties of direct summands of modules*, Contact Franco-Belge, Antwerpen, 1985.

[45] Glaz, S., Wickless, W., *Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups*, Comm. Algebra, 22, 1994, 1161-1176.

[46] Griffith, P., *Infinite Abelian Groups*, Chicago Lectures in Mathematics, Chicago and London, 1970.

[47] Hausen, J., *Finite rank torsion-free abelian groups uniserial over their endomorphism rings*, Proc. Amer. Math. Soc., 93, 1985.

[48] Hausen, J., *Modules with the summand intersection property*, Comm. Algebra, 17, 1989, 135-148.

[49] Hill, P., *On transitive and fully transitive primary groups*, Proc. Amer. Math. Soc., 22, 1969, 414-417.

[50] Huber, M., Warfield, R. B., *Homomorphism between cartesian powers of an abelian group*, Abelian Group Theory, Lecture Notes in Math, 874, Springer-Verlag, Berlin, New-York, Heidelberg, 1974.

[51] Hungerford, T. W., *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, New-York, Heidelberg, 1974.

[52] Ion, D. I., Radu, N., *Algebra*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.

[53] Jensen, C. U., *A remark on flat and projective modules*, Connad. J. Math. 18, 1986, 943-949.

[54] Jónssen, B., *On direct decomposition of torsion-free abelian groups*, Math. Scand., 7, 1959, 361-371.

[55] Kamalov, F. F., *Intersecţia sumanzilor direcţi ai grupurilor abeliene (în l. rusă)*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 5, 1977, 45-56.

[56] Kaplansky, I., *Modules over Dedekind rings and valuation rings*, Trans. Amer. Math. Soc., 72, 1952, 327-340.

[57] Kaplansky, I., *Projective Modules*, Ann. of Math. 68, 1957, 372-377.

[58] Kaplansky, I., *Infinite Abelian Groups*, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, Michingan, 1954, 1969.

[59] Kaplansky, I., *Commutative Rings*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1974.

[60] Kertész, A., *On fullly decomposable abelian torsion groups*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar, 3, 1952, 225-237.

[61] Kertész, A., Szele, T., *On abelian groups every multiple of which is a direct summand*, Acta. Sci. Math. Szeged, 14, 1952, 157-166.

[62] Kulicov, L., *O sumă directă de grupuri, (în l. rusă)*, Ukrain. J. Math. Tom. IV, Nr. 3, 1952, 230-275.

[63] Kulicov, L., *O sumă directă de grupuri, (în l. rusă)*, Ukrain. J. Math. Tom. IV, Nr. 4, 1952, 347- 372.

[64] Kuroş, A., *Lecţii de algebră (l. rusă)*, Editura Fizmatiz, 1962.

[65] Kuroş, A., *Teoria grupurilor (l. rusă)*, Editura Nauka, 1967.

[66] Lambek. J., *Lectures on Rings and Modules*, Blaisdell Publ. Comp. a Division of Ginn and Comp., Waltham, Massachusetts, Toronto, London, 1966.

[67] Levine, J., *On the injective hulls of semisimple modules*, Trans. Amer. Math. Soc., 155(1), 1971, 115-126.

[68] Matlis, E., *Injective modules over noetherian rings*, Pacific J. Math., 8(3), 1958, 508-549.

[69] Purdea, I., Pic, Gh., *Tratat de algebră modernă*, Vol. I, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1980.

[70] Purdea, I., *Tratat de algebră modernă*, Vol. II, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1982.

[71] Rangaswamy, K. M., *Full subgroups of abelian groups*, Indian J. Math., 6, 1964, 21-27.

[72] Rangaswamy, K. M., *Abelian groups with endomorphic images of special types*, J. Algebra, 6, 1967, 271-280.

[73] Reid, J. D., *On quasi-decomposition of torsion-free abelian groups*, Proc. Amer. Math. Soc., 13, 1962, 550-554.

[74] Rickmann, F., Walker, E., *Cyclic Ext.*, Rocky Montain J. Math. 11, 1981, 611-615.

[75] Rotmann, J. J., *Notes on Homological Algebra*, Van Nostrand Reinhold Company, New-York, Cincinnati, Toronto, London, 1970.

[76] Rotmann, J. J., *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New-York, 1979.

[77] Rowen, L., *Ring Theory*, Academic Press, New-York, 1988.

[78] Sharpe, D. W., Wámos, P., *Injective modules*, Cambridge at the University Press, 1972.

[79] Ulmer, F., *Localizations of endomorphism rings and fixpoints*, J. Algebra, 43, 1976, 529-551.

[80] Vălcan, D., *Grupuri abeliene cu proprietatea intersecţiei sumanzilor direcţi*, The Annual Conference of the Romanian Society of Mathematical Sciences, 1997, May 29-June 1, Bucharest, Romania, 111-120.

[81] Vălcan, D., *Subgroups and quotient groups of abelian groups with the direct summand intersection property*, Buletinul Ştiinţific al Universităţii de Nord, Baia-Mare, Seria B, Fascicola Matematică-Informatică, Vol. XIII, Nr. 1-2, 1997, 17-32.

[82] Vălcan, D., *Other characterizations of the abelian groups with the direct summand intersection property*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Seria Mathematica, Vol. XLIII, Nr. 1, March 1998, 95-122.

[83] Vălcan, D., *On a problem of abelian group theory*, Proceedings of the Annual Meeting of the Romanian Soc. of Math. Sci. Cluj-Napoca, 27-31 Mai 1998, 57-64.

[84] Vălcan, D., *Injective modules with the direct summand intersection property*, Buletinul Ştiinţific al Academiei de Ştiinţe a Moldovei, Seria Mathematatica, Nr. 3(31), 1999, 39-50.

[85] Vălcan, D., *Submodules and quotient modules of modules with the direct summand intersection property*, Italian J. of Pure and Applied Math., Nr. 7, 2000, 95-112.

[86] Vălcan, D., *On some homomorphisms of direct sums of modules*, Proceedings of A. Razmadze Math. Institute, Vol. 124, 2000, 151-162.

[87] Vălcan, D., *Again on the direct sums of modules with the direct summand intersection property*, Buletinul Ştiinţific al Academiei de Ştiinţe a Moldovei, Seria Mathematica, Nr. 3(37), 2001, 79-87.

[88] Vălcan D., *Abelian groups with the direct summand sum property*, Demonstratio Mathematica, Vol. XXXV, Nr. 3, 2002, 477-491.

[89] Vălcan, D., *Modules with the direct summand sum property*, Czech. Mathematical Journal, 53 (128) 2003, 277-287.

[90] Vălcan, D. *Indecomposable subgroups of torsion-free abelian groups*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Seria Mathematica, Vol. LII, Nr. 2, June 2007, 133-140.

[91] Vălcan, D., *About a category of Abelian groups*, General Mathematics, Vol. 24, No. 1 (2016), 53-63.

[92] Walker, E. A., *Cancellation in direct sums of groups,* Proc. Amer. Math. Soc., 7, 1956, 898-902.

[93] Wang, J. S. P., *On completely decomposable groups*, Proc. Americ. Math. Soc. 15,(2), 1964, 184-186.

[94] Ware, R., *Endomorphism rings of projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc., 155(1), 1971, 233-256.

[95] Warfield, R. B. Jr., *Decompositions of injective modules*, Pacific J. Math. 31(1), 1969, 263-276.

[96] Wickless, W. J., *A functor from mixed groups to torsion-free groups*, Abelian Group Theory and Related Topics, 171, Amer. Math. Soc., Contempory Mathematics, 1994, 407-417.

[97] Wilson, G. V., *Modules with the summand intersection property*, Comm. Algebra, 14(1), 1986, 21-38.

[98] Zassenhaus, H., *Orders as endomorphism rings of modules of the same rank*, J. London Math. Soc, 42, 1967, 180-182.

[99] Zheng, X. H., *Characterizations of Noetherian and Hereditary Rings*, Proc. Amer. Math. Soc., 93, Nr. 3, 1985, 414-416.

CUPRINS



ISBN: 978-606-37-0367-6